Beiträge zur Theorie der Flächen mit einer Schar von Minimalgeraden.

Inaugural-Dissertation

einer

Hohen philosophischen Fakultät (II. Sektion)

der

K. B. Ludwig-Maximilians-Universität zu München

am 7. Juli 1911

zur

Erlangung der Doktorwürde

vorgelegt von

Ludwig Weickmann.

München 1912.
Kgl. Hof- und Universitäts-Buchdruckerei von Dr. C. Wolf & Sohn.

Beiträge zur Theorie der Flächen mit einer Schar von Minimalgeraden.

Inaugural-Dissertation

einer

Hohen philosophischen Fakultät (II. Sektion)

der

K. B. Ludwig-Maximilians-Universität zu München

ACAD.
LUGD.BAT.
BIBL.

am 7. Juli 1911

zur

Erlangung der Doktorwürde

vorgelegt von

Ludwig Weickmann.

München 1912.
Kgl. Hof- und Universitäts-Buchdruckerei von Dr. C. Wolf & Sohn.

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41545821_0182

Vorwort.

Die Flächen mit einer Schar von Minimalgeraden waren bereits wiederholt Gegenstand der Untersuchung.

Historische Notizen darüber wurden gesammelt von Herrn P. Stäckel und dem leider vor kurzem allzufrüh verstorbenen französischen Mathematiker L. Raffy. Beide haben ihrerseits durch wertvolle, neue Beiträge die Theorie dieser Flächen bereichert. Einige in der früheren Litteratur zerstreut liegende, meist als Ausnahmefälle allgemeinerer Probleme aufgetretene Ergebnisse sind den genannten Forschern entgangen und in der vorliegenden Arbeit zitiert.

Die von mir behandelten Fragen beziehen sich hauptsächlich auf die interessanten Ausnahmen, welche die Flächen mit einer Schar von Minimalgeraden für die Theorie der unendlich kleinen Verbiegungen und der Strahlensysteme zur Folge haben.

Im ersten Teile der Untersuchung (bis S. 23) werden nach einer kurzen Besprechung der Flächen, die eine den absoluten Kegelschnitt berührende Leitebene besitzen, und der Flächen, für die $EG - F^2 = 0$ ist, die Biegungsprobleme der Flächen mit einer Schar von Minimalgeraden behandelt. Dieser Teil war im wesentlichen abgeschlossen, als die umfassende Arbeit Raffys („Étude sur les surf. imag. de Monge“ Bull. de la soc. math. de France. Bd. 36, 1908) erschien. In der vorliegenden Publikation sind die gemeinsamen Resultate unterdrückt, soweit nicht die verschiedene Methode der Ableitung die Veröffentlichung rechtfertigte.

Dann folgen (S. 23—28) zwei Kapitel über die Parallelflächen von Flächen mit einer Schar von Minimalgeraden und Bemerkungen über die fraglichen Flächen als Enveloppen einer ∞^1-Kugelschar.

Im zweiten Teile (S. 28—51) werden die einer Fläche S mit einer Schar von Minimalgeraden durch die Moutardsche Zuordnung entsprechenden Flächen $\bar{S}$ bestimmt. Die Ribaucourschen Strahlensysteme, welche die Fläche S zur erzeugenden Fläche haben, sind „halbisotrope" Kongruenzen, die dem Ausnahmefall

$$4\left[\mathfrak{E}\frac{f+f'}{2}-\mathfrak{F}e\right]\left[\mathfrak{F}g-\mathfrak{G}\frac{f+f'}{2}\right]-\left[\mathfrak{G}e-\mathfrak{E}g\right]^2=0$$

entsprechen. Bei ihnen ist die Abszisse der Fusspunkte der kleinsten Abstände eines Strahles von den ihm unendlich benachbarten eine lineare Funktion der zugehörigen Tangentenrichtungen auf der Ausgangsfläche. Sie stellen einen bemerkenswerten Dualismus her zwischen den Flächen mit einer Schar von Minimalgeraden, bei denen in jedem Punkt das Krümmungsmass eines Normalschnitts eine linear gebrochene Funktion der zugehörigen Tangentenrichtung ist und den Flächen mit lauter Nabelpunkten einerseits und den halbisotropen und isotropen Strahlensystemen andererseits.

Weitere zwei Kapitel untersuchen dann die einer halbisotropen Strahlenkongruenz zugeordneten normalen Kreissysteme, speziell ein neues Zykelsystem vom Radius Null und das zu diesem gehörige dreifache Orthogonalsystem. Die Assoziierten der Flächen S, welche die Enveloppen der Kreisebenen der dem halbisotropen Strahlensystem zugeordneten normalen Kreissysteme sind, enthalten ein von Minimalkurven und geodätischen Linien gebildetes konjugiertes System, das bei stetiger Verbiegung ungeändert bleibt. Die halbisotropen Strahlensysteme treten dadurch zwischen die isotropen, deren erzeugende Flächen Kugeln, deren Enveloppen Minimalflächen und die Guichardschen Strahlensysteme, deren er-

zeugende Flächen pseudosphärische sind, deren Enveloppen Voss'sche Flächen sind.

Die Anregung zu der Arbeit empfing ich bereits im Jahre 1906 von meinem hochverehrten Lehrer Herrn Geh.-Rat A. Voss, der in wohlwollendster Weise den Fortgang der Arbeit förderte. Die Veröffentlichung der im wesentlichen schon seit dem Sommer 1908 vorliegenden Resultate verzögerte sich durch andere Arbeiten und die dienstliche Inanspruchnahme des Verfassers.

Einleitung.

§ 1. Die Verbiegung von Regelflächen mit reellen Erzeugenden.

1°. Die Parameterdarstellung einer Regelfläche R ist allgemein von der Form

$$\begin{aligned} x &= a_1 u + b_1 \\ y &= a_2 u + b_2 \\ z &= a_3 u + b_3 \end{aligned} \tag{1}$$

wo $b_1 = \varphi(v)$, $b_2 = \psi(v)$, $b_3 = \chi(v)$

die Koordinaten der Ausgangskurve sind und

$$a_1 = \varphi_1(v),\ a_2 = \psi_1(v),\ a_3 = \chi_1(v)$$

das Gesetz bestimmen, nach welchem sich die Richtung der Erzeugenden längs der Ausgangskurve ($u = 0$) ändert.

Für das Längenelement der R ergibt sich daraus die Form

$$\begin{aligned} ds^2 = E\,du^2 + (E'u + 2F)\,du\,dv \\ + (Au^2 + 2Bu + C)\,dv^2, \end{aligned} \tag{2}$$

wo

$$\begin{aligned} E &= \Sigma a^2, \quad A = \Sigma a'^2 \\ F &= \Sigma a b', \quad B = \Sigma a' b' \\ C &= \Sigma b'^2 \end{aligned} \tag{3}$$

ist, wenn die Akzente Ableitungen nach v bedeuten und wir mit dem Summenzeichen Σ ein für allemal dreigliedrige Summen bezeichnen.

Wählt man die a_1, a_2, a_3 als Richtungscosinus der Erzeugenden, dann wird $E = 1$. Diese Wahl ist indes nicht möglich, wenn

$$\Sigma a^2 = 0$$

wird, d. h. wenn die geradlinigen Erzeugenden der Fläche Minimalgerade sind.

Die Untersuchung dieses Ausnahmefalles $E = 0$ bildet den wesentlichen Inhalt der vorliegenden Abhandlung.

Sehen wir vorerst von diesem Falle ab, so ist unter der Voraussetzung $E = 1$ die stetige Verbiegung der Regelflächen nach der Methode von Minding bekanntlich in folgender Weise bestimmt. Man nimmt die a_1, a_2, a_3 als bekannt an und sucht die b_1, b_2, b_3. Der Gleichung $E = 1$ genügt man durch den Ansatz[1])

$$a_1 = \cos\vartheta \cos\omega, \quad a_2 = \cos\vartheta \sin\omega, \quad a_3 = \sin\vartheta,$$

wo ϑ und ω Funktionen von v sind. Aus der zweiten Gleichung des Systems (3) folgt dann

$$\omega = \int \frac{\sqrt{A - \vartheta'^2}}{\sin\vartheta}\, dv.$$

ϑ bleibt dabei eine willkürliche Funktion von v.

Die drei weiteren Gleichungen (3) ergeben für die b_1, b_2, b_3 die Auflösung[2]):

$$\begin{aligned} b'_1 &= a_1 F + a'_1 \frac{B}{A} + \frac{H}{A} s_1, \\ b'_2 &= a_2 F + a'_2 \frac{B}{A} + \frac{H}{A} s_2, \\ b'_3 &= a_3 F + a'_3 \frac{B}{A} + \frac{H}{A} s_3, \end{aligned} \tag{4}$$

wo

$$H = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a'_1 & a'_2 & a'_3 \\ b'_1 & b'_2 & b'_3 \end{vmatrix} = \sqrt{AC - B^2 - AF^2},$$

und $s_1 = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ a'_2 & a'_3 \end{vmatrix}$, $s_2 = \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ a'_3 & a'_1 \end{vmatrix}$, $s_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ a'_1 & a'_2 \end{vmatrix}$ ist.

In den Gleichungen (4) kommt die Grösse A im Nenner vor. Die Auflösung versagt also für den Fall

$$A = 0.$$

Wir werden diesen Ausnahmefall im nächsten Paragraphen (S. 10) erledigen.

---

[1]) Bianchi, Vorlesungen, S. 230.

[2]) Darboux, Leçons III, S. 29.

2⁰. Zur Bestimmung derjenigen Regelflächen, die auf Rotationsflächen verbiegbar sind, bedient man sich des ersten und zweiten Differentialparameters für die Krümmung K der Fläche

$$\Delta_1 K = \frac{E\left(\frac{\partial K}{\partial v}\right)^2 - 2F\frac{\partial K}{\partial u}\frac{\partial K}{\partial v} + G\left(\frac{\partial K}{\partial u}\right)^2}{D^2}$$

$$\Delta_2 K = \frac{1}{D}\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{G\frac{\partial K}{\partial v} - F\frac{\partial K}{\partial v}}{D}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{E\frac{\partial K}{\partial u} - F\frac{\partial K}{\partial v}}{D}\right)\right],$$

$$D^2 = EG - F^2.$$

Die Bedingung für die Abwickelbarkeit auf Rotationsflächen lautet

$$\Delta_1 K = f(K),\ \Delta_2 K = f_1(K). \tag{5}$$

Wählt man als Parametersystem der Regelflächen die geradlinigen Erzeugenden und ihre orthogonalen Trajektorien, was jedoch nur möglich ist, wenn $E \neq 0$ ist, so nimmt das Längenelement die Form an

$$ds^2 = du^2 + (Au^2 + 2Bu + C)\,dv^2. \tag{6}$$

Setzen wir ferner

$$AC - B^2 = 1, \tag{7}$$

so wird

$$K = -\frac{1}{(Au^2 + 2Ba + C)^2} = -\frac{1}{G^2},$$

und die Bedingungen (5) nehmen nach einfacher Rechnung die Form an:

$$\begin{aligned} G_v^2 + 4AG^2 &= F(G) \\ G_{vv} + 2AG &= F_1(G). \end{aligned} \tag{8}$$

Daraus ist leicht abzuleiten, dass A eine Konstante sein muss. Differentieren wir die erste Gleichung (8) nach v, so folgt mit Rücksicht auf die zweite Gleichung (8):

$$AG_v + A_vG = F(G)G_v$$

oder

$$\frac{\partial(AG)}{\partial v} = \frac{\partial F_1(G)}{\partial v},$$

also:

$$AG = F_1(G) + \psi(u).$$

Differentiert man diese Gleichung unter der Voraussetzung $G = \text{const.}$, so ist:

$$A'(Au^2 + 2Bu + C)\,dv = \psi'(u)\,du.$$

Aber unter derselben Voraussetzung ist

$$dG = 0 = 2(Au + B)\,du + (A'u^2 + 2B'u + C')\,dv.$$

Nun wird

$$\frac{dv}{du} = \frac{\psi'}{A'}\,\frac{1}{Au^2 + 2Bu + C} = -\frac{2(Au + B)}{A'u^2 + 2B'u + C'}, \tag{9}$$

oder

$$\psi'(A'u^2 + 2B'u + C') = -2A'(Au + B)(Au^2 + 2Bu + C).$$

Da unter der Voraussetzung $A' \neq 0$ die rechte Seite dieser Gleichung nicht verschwindet und auf beiden Seiten dieselbe Faktorenzerlegung möglich sein muss, muss $Au + B$ in $A'u^2 + 2B'u + C'$ enthalten sein. Dazu muss die Resultante verschwinden:

$$A'B^2 - A(2BB' - AC') = 0.$$

Aber aus der Gleichung (7) folgt durch Differentiation:

$$AC' + CA' - 2BB' = 0,$$

also ist:

$$A'(AC - B^2) = 0\ ^1)$$

d. h.

$$A' = 0.$$

Aus den Gleichungen (8) lassen sich dann ohne weitere Rechnung die zwei Fälle ablesen:

1) $A = \text{const.}$, $B = \text{const.}$, $C = \text{const.}$

2) $A = \text{const}$, $B = av + b$, $C = \alpha v^2 + \beta v + \gamma$. (10)

Lässt man auch den Ausnahmefall $A = 0$ zu, so tritt noch die weitere Lösung hinzu:

3) $A = 0$, $B = i$, $C = mv + n$. (10*)

---

[1]) $AC - B^2$ verschwindet im reellen Fall nur für die in die Ebene abwickelbaren Regelflächen. Es folgt nämlich aus $AC - B^2 = 0$:

$$a'_1 b'_2 - a'_2 b'_1 = 0$$
$$a'_1 b'_3 - a'_3 b'_1 = 0$$
$$a'_2 b'_3 - a'_3 b'_2 = 0.$$

Sind L, M, N die Fundamentalgrössen zweiter Ordnung der Fläche, so lässt sich M in die Form bringen:

$$M = \Sigma a_1 (a'_3 b'_2 - a'_2 b'_3), \text{ d. h. } M = 0.$$

Da auch L wegen der Parameterdarstellung (1) (S. 6) gleich Null ist ($x_{uu} = y_{uu} = z_{uu} = 0$), so verschwindet auf der ganzen Fläche $LN - M^2$.

Bekanntlich führen die beiden ersten Formen zu den Biegungsflächen der Minimalschraubenregelfläche und des Rotationshyperboloids.

Diese Ableitung der Gleichungen (10) und (10*) scheint mir etwas einfacher als die bei Darboux, Leçons Bd. III, § 691—693 gegebene.

§ 2. Flächen mit einer Leitebene, die den absoluten Kegelschnitt der uneigentlichen Ebene berührt.

Unter der Voraussetzung, dass die Fundamentalgrösse E nicht verschwindet, besagt die Gleichung

$$A = a'_1{}^2 + a'_2{}^2 + a'_3{}^2 = 0$$

nichts anderes als:

Es soll auf der Kugel ($E = 1$) eine Kurve bestimmt werden, deren Längenelement gleich Null ist. Die Kugel enthält bekanntlich ausser den beiden Scharen von Minimalgeraden, die auf ihr liegen, keine Minimalkurven. Der Leitkegel der zugehörigen Flächen reduziert sich also auf eine Ebene, die durch den Mittelpunkt der Kugel geht und eine der Minimalgeraden der Kugel enthält. Diese Ebene berührt den absoluten Kegelschnitt. Flächen R, bei denen $A = 0$ ist, haben daher eine Leitebene, die den absoluten Kegelschnitt berührt und zwar verschwindet A auch nur für solche geradlinige Flächen.

Das System der Gleichungen

$$E = 1, \quad A = 0$$

ist damit integriert. Die Beziehung zwischen den a_i ist linear von der Form[1]):

$$a_3 = c\,a_1 + \sqrt{1 + c^2}$$
$$a_2 = i\,a_1\sqrt{1 + c^2} + i\,c.$$

---

[1]) Man erhält die Gleichung

$$1 + \left(\frac{da_3}{da_1}\right)^2 - \left[a_3 - a_1\frac{da_3}{da_1}\right]^2 = 0,$$

deren allgemeines Integral $a_3 = c\,a_1 + \sqrt{1 + c^2}$ ist.

Für b_1, b_2, b_3 ergeben sich in einfacher Weise die Gleichungen

$$\begin{aligned} b'_1 &= a_1 F + a'_1 \frac{C - F^2}{2B} + \frac{1 - \lambda^2}{2} H, \\ b'_2 &= a_2 F + a'_2 \frac{C - F^2}{2B} + i\frac{1 + \lambda^2}{2} H, \\ b'_3 &= a_3 F + a'_3 \frac{C - F^2}{2B} + \lambda H. \end{aligned} \tag{1}$$

Dabei ist

$$\lambda = \frac{a_1 - i a_2}{-a_3 \pm 1}$$

$$H = \frac{B\lambda}{(1 - \lambda^2) a'_1 - i(1 + \lambda^2) a'_2 + 2\lambda a'_3}.$$

Damit ist bis auf Quadraturen die Biegung der Flächen, die eine den absoluten Kegelschnitt berührende Leitebene besitzen, angegeben.

Da die Leitebene eine Minimalebene ist, so sind die Erzeugenden der zugehörigen Regelflächen imaginär, die Flächen also nur reell, wenn zwei Scharen konjugiert imaginärer Erzeugenden auf ihnen liegen. Von den Flächen zweiten Grades haben nur das elliptische und das hyperbolische Paraboloid eine Leitebene. Das elliptische Paraboloid

$$\frac{y^2}{b} + \frac{z^2}{c} = 2x$$

hat die Leitebene $\dfrac{i y}{\sqrt{b}} + \dfrac{z}{\sqrt{c}} = 0.$

Diese berührt für $b = c$ den absoluten Kegelschnitt, d. h. das Rotationsparaboloid ist die einzige reelle Regelfläche mit einer Leitebene, die den absoluten Kegelschnitt berührt.

Das System der Gleichungen (1) versagt nur in einem Falle, wenn nämlich $B = 0$ wird. Dann ist aber $AC - B^2 = 0$, was bereits erledigt ist.[1])

[1]) Im reellen Falle liefert $A = 0$, $B = 0$ die Zylinder, sonst die imaginären in die Ebene abwickelbaren Flächen.

Die Verbiegung der Flächen ($A = 0$) auf Rotationsflächen ist bereits auf S. 9 erledigt. Durch geeignete Transformation des dort angegebenen Längenelements (10*) erhält man die beiden Formen:

$$ds^2 = du^2 + u\,dv^2$$
$$ds^2 = du^2 + (u + a\,v)\,dv^2.$$

Das letzte Längenelement entspricht dem Rotationsparaboloid.

Mit Hilfe der Gleichungen (1) lassen sich auch spezielle Verbiegungen dieser Flächen angeben, z. B. eine Fläche $A = 0$ so zu verbiegen, dass eine beliebige ihrer Kurven eben wird.

Ist $u = 0$ die gegebene Kurve, so liefert $b'_1 = 0$ im Falle $F = 0$ die Lösung

$$\frac{a'_1}{H(1-\lambda^2)} = -\frac{B}{C}.$$

Man gelangt hier natürlich nicht zu wesentlich neuen Ergebnissen, da unter der Voraussetzung $E \neq 0$ die Flächen ($A = 0$) nur formal eine Ausnahme in der Theorie der Verbiegung bilden.

I. Teil.

1. Kapitel.

Die Tangentenflächen von Minimalkurven.

Das Verschwinden der Fundamentalgrösse E in der Darstellung (2) (S. 6) des Längenelements einer Regelfläche bedeutet, dass eines der beiden Systeme der Minimalkurven der Fläche gebildet wird von den geradlinigen Erzeugenden, die also Minimalgerade sind.

Dabei sind komplexe Werte des Parameters ausdrücklich auszuschliessen, da sonst schon die fundamentale Voraussetzung unrichtig wird, dass durch jeden Punkt des Raumes nur ∞^1 Minimalgerade gehen.[1])

Die geometrische Interpretation der Grössen E und A auf S. 10 führt hier zu der Aufgabe:

Es soll auf der Nullkugel ($E = 0$) eine Kurve bestimmt werden, deren Bogenelement $= A$ ist.

Die Parameterdarstellung der Nullkugel ist von der Form:

$$\begin{aligned} x &= a + \frac{1-\alpha^2}{2}\beta, \\ y &= b + i\frac{1+\alpha^2}{2}\beta, \\ z &= c + \alpha\beta. \end{aligned} \tag{1}$$

Dabei sind $\alpha = \text{const.}$ die ∞^1 Minimalgeraden der Fläche, Diese bilden die einzige Schar von Minimallinien und zu-

[1]) Vergl. E. Study, Zur Differentialgeometrie der analytischen Kurven. Transact. of the Am. Math. Soc. 10, 1909, S. 7 ff.

gleich auch die einzige Schar geodätischer Linien, welche die Fläche enthält. Diese letztere Eigenschaft besitzen nur die Tangentenflächen von Minimalkurven, von denen die Kugel ein spezieller Fall ist.

Die Kurven $\beta = \text{const.}$ sind imaginäre Kurven von der Krümmung Null, deren Torsion illusorisch ist. Sie werden von Minimalebenen

$$x - iy = a + ib + \beta$$

ausgeschnitten[1]) und bilden eine Parabelschar, deren Projektion auf die xz-Ebene die Form hat:

$$(z - c)^2 + 2\beta(x - \alpha) - \beta^2 = 0.$$

Eine beliebige Kurve $\alpha = \varphi(\beta)$ der Nullkugel hat die Form:

$$x = a + \frac{1 - \varphi(\beta)^2}{2}\beta, \text{ u. s. w.}$$

Für sie wird

$$\Sigma x_\beta^2 = \beta^2 \varphi'(\beta)^2.$$

Ist dieser Ausdruck gleich 1, so wird die Krümmung k dieser Kurven, für die also β die Bogenlänge ist,

$$k = \frac{1}{\beta^2};$$

es sind daher Kurven, deren Krümmungsradius in jedem Punkte gleich der Bogenlänge ist. Diese Kurven haben im Punkte (a, b, c) einen asymptotischen Punkt.

Ist $\Sigma x_\beta^2 = 0$, d. h. $\varphi = \text{const.}$, so liegen wieder die Minimalgeraden $\alpha = \text{const.}$ vor. Daraus folgt, wenn man auf die geometrische Deutung der Grössen E und A zurückgeht, dass für diejenigen Regelflächen mit einer Schar von Minimalgeraden, für die A verschwindet, die „sphärische Indikatrix" (auf der Nullkugel genommen) eine Minimalgerade der Nullkugel ist. Die oben ausgesprochene Behauptung, dass A

[1]) Alle in Minimalebenen gelegenen Kurven haben die Krümmung Null und die Torsion $\frac{0}{0}$. Vergl. E. Study „Krit. Betracht. über Lie's Invar.-Theorie d. endl. kont. Gruppen". Jahresb. d. deutsch. Math. Ver. 17. Bd. Leipzig 1908.

nur für solche Flächen verschwinde, die eine den absoluten Kegelschnitt berührende Leitebene besitzen, spezialisiert sich also im Falle $E = 0$ in der Weise, dass alle Erzeugenden der Fläche einer und derselben Minimalgeraden parallel laufen. Die entsprechenden Flächen sind die Zylinder von Minimalgeraden, speziell auch die Minimalebenen. Die Ebene, welche diese Eigenschaft zweimal hat, enthält bekanntlich zwei Scharen von Minimalgeraden.

Für die Nullkugel selbst ist $A = 1$, für die allgemeinen Tangentenflächen von Minimalkurven und für die übrigen Regelflächen mit einer Schar von Minimalgeraden ist A eine beliebige Funktion des Parameters.

Für die Zylinder von Minimalgeraden, die Tangentenflächen von Minimalkurven, speziell die Nullkugeln und die Minimalebenen ist

$$AC - B^2 = 0.$$

Auf den drei letzten Flächen ist auch $EG - F^2 = 0$, dagegen nicht auf den Zylindern von Minimalgeraden.

Bei den Tangentenflächen von Minimalkurven fallen die beiden Scharen von Minimalkurven in die eine Schar der Minimalgeraden zusammen. Die Definition der Krümmung versagt für diese Flächen.[1]) Wenn man aber die Zentrafläche als die Brenn*fläche* der Normalenkongruenz der Fläche definiert, so ist hier, wo die „Zentrafläche“ ausartet, die erzeugende Minimalkurve der Fläche zugleich als „Zentrakurve“ anzusehen.[2]) Denn die Richtungscosinus der Flächennormale sind den drei Grössen

$$y_0 z_1 - z_0 y_1,\quad z_0 x_1 - x_0 z_1,\quad x_0 y_1 - y_0 x_1$$

[1]) Sie sind daher auch nicht auf die Ebene abwickelbar, wie häufig angegeben wird. (F. Ahl „Untersuch. üb. geod. Linien“, Diss., Kiel 1901. S. 13.)

[2]) Wenn man die Krümmungslinien durch die abwickelbaren Flächen der Normalen definiert, kann man jede Kurve der Minimaldeveloppabeln als „Krümmungslinie“ bezeichnen, da längs jeder beliebigen Kurve die Flächennormalen eine Developpable (nämlich die Fläche selbst) bilden. Siehe übrigens E. Study, Zur Differentialgeometrie der analyt. Kurven. Transactions of the Am. Math. Soc. 10. 1909. S. 2.

proportional; deren Summe der Quadrate ist

$$E G - F^2 = 0.$$

Die Normale in einem Punkt der Fläche ist daher eine Minimalgerade, fällt also mit der Erzeugenden durch diesen Punkt zusammen.

Auf die spezielle Geometrie dieser Flächen, die sehr merkwürdige Resultate liefert, soll aber hier nicht näher eingegangen werden; wir schliessen diese Flächen vielmehr vollständig aus unserer Untersuchung aus.

2. Kapitel.

Analytische Darstellung der Flächen mit einer Schar von Minimalgeraden.

Minimalkurven als Parametersystem.

Wir nehmen an, das Quadrat des Längenelements der Flächen mit einer Schar von Minimalgeraden habe die Form:

$$ds^2 = 2F\,du\,dv + (Au^2 + 2Bu + C)\,dv^2. \qquad (1)$$

Offenbar reduziert sich die Riccatische Gleichung

$$\frac{du}{dv} = -\frac{Au^2 + 2Bu + C}{2F},$$

von der die Bestimmung der Minimalkurven abhängt, auf den einfachen Typus einer Bernoullischen Gleichung zweiten Grades, wenn die Grösse C verschwindet:

$$\frac{1}{u^2}\frac{du}{dv} + \frac{B}{F}\frac{1}{u} = -\frac{A}{2F}.$$

Aus der Definitionsgleichung (3) (S. 6):

$$C = \Sigma b'^2$$

folgt, dass für $C = 0$ die Ausgangskurve eine Minimalkurve ist.

Die Parameterdarstellung einer Minimalkurve hat die Form:

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{2}\int (1 - v^2)\,\varphi(v)\,dv, \\ y &= \frac{i}{2}\int (1 + v^2)\,\varphi(v)\,dv, \\ z &= \int v\,\varphi(v)\,dv, \end{aligned} \qquad (2)$$

wo $\varphi(v)$ eine beliebige Funktion des Parameters bedeutet. Stellt (2) die Gleichungen unserer Ausgangskurve dar, so ergeben sich für die Fläche mit einer Schar von Minimalgeraden die Koordinaten:

$$\begin{aligned} x &= \frac{1-\omega^2}{2}u + \frac{1}{2}\int (1-v^2)\varphi(v)\,dv, \\ y &= i\frac{1+\omega^2}{2}u + \frac{i}{2}\int (1+v^2)\varphi(v)\,dv, \qquad (2^*) \\ z &= \omega u + \int v\varphi(v)\,dv, \end{aligned}$$

wo ω eine beliebige nicht konstante Funktion von v ist.

Die Differentialgleichung der Minimalkurven ist dann

$$-(v-\omega)^2\varphi\,du + [\omega'^2 u^2 + 2u\omega'\varphi(v-\omega)]\,dv = 0. \qquad (3)$$

Die Ausflösung ergibt

$$\bar{u} = \frac{V_1}{u} + V_2 = \text{const},$$

wo $$V_1 = e^{2\int \frac{\omega'}{v-\omega}dv}, \quad V_2 = \int \frac{\omega'^2 V_1}{(v-\omega)^2\varphi}dv$$

ist. Führt man V_2 als neuen Parameter ein und setzt

$$e^{\int \frac{\omega'}{v-\omega}dv} = \Omega_2, \quad \Omega_1 = \omega\Omega_2,$$

so erhält man die folgende Parameterdarstellung[1]) der Flächen mit einer Schar von Minimalgeraden bezogen auf ihre Minimalkurven:

$$\begin{aligned} x + iy &= -\frac{\Omega_1^2}{u-v} - \int \Omega'^2_1\,dv, \\ x - iy &= \frac{\Omega_2^2}{u-v} + \int \Omega'^2_2\,dv, \qquad (4) \\ z &= \frac{\Omega_1\Omega_2}{u-v} + \int \Omega'_1\Omega'_2\,dv, \end{aligned}$$

wobei der Einfachheit wegen wieder u statt $\bar{u}$ geschrieben ist.

---

[1]) Diese Darstellung geht für $u=\beta$, $V_2=-\alpha$, $V_1=-A_1^2$, $\omega^2 V_1 = A^2$ in die von L. Raffy, C. R. Bd. 146, 1908, S. 618 angegebene über; seine

Für die Berechnung von F ergibt sich:

$$x_u = -\frac{\Omega_2^2 - \Omega_1^2}{2(u-v)^2},$$

$$y_u = -i\frac{\Omega_2^2 + \Omega_1^2}{2(u-v)^2},$$

$$z_u = -\frac{\Omega_1 \Omega_2}{(u-v)^2};$$

$$x_v = -x_u + \frac{\Omega'^2_2 - \Omega'^2_1}{2} + \frac{\Omega_2 \Omega'_2 - \Omega_1 \Omega'_1}{u-v},$$

$$y_v = -y_u + i\frac{\Omega'^2_2 + \Omega'^2_1}{2} + i\frac{\Omega_2 \Omega'_2 + \Omega_1 \Omega'_1}{u-v},$$

$$z_v = -z_u + \Omega'_1 \Omega'_2 + \frac{\Omega_1 \Omega'_2 + \Omega_2 \Omega'_1}{u-v}.$$

Damit nimmt das Quadrat des Längenelements die Form an:

$$ds^2 = (\Omega_1 \Omega'_2 - \Omega_2 \Omega'_1)^2 \frac{du\,dv}{(u-v)^2}. \tag{5}$$

Da $L = 0$ und $M = \frac{\Omega_1 \Omega'_2 - \Omega_2 \Omega'_1}{(u-v)^2} = \frac{2F}{\Omega_1 \Omega'_2 - \Omega_2 \Omega'_1}$ ist, so wird die Krümmung K der Flächen

$$K = \frac{4}{(\Omega_1 \Omega'_2 - \Omega_2 \Omega'_1)^2}, \tag{6}$$

also eine Funktion von v allein. Das ergibt sich auch ohne weiteres aus der ersten Fundamentalgleichung von Codazzi, die für $E = G = 0$, $L = 0$ die Form hat:

$$F M_u - F_u M = 0.$$

Die Krümmung K ist

$$K = \frac{M^2}{F^2},$$

also:

$$\frac{\partial K}{du} = \frac{2M}{F^3}(F M_u - M F_u) = 0.$$

Ableitung stützt sich auf die Formeln, die O. Bonnet bei der Aufstellung der Gleichung für die Flächen, deren Linienelement die Form $4\varphi^2(u, v)\,du$ annimmt, gewonnen hat.

Die totale Flächenkrümmung ist daher längs der Minimalgeraden konstant.[1])

Die Differentialgleichung der Krümmungslinien reduziert sich auf

$$F N d v^2 = 0;$$

die Minimalgeraden sind also die einzige Schar der Krümmungskurven auf den Flächen. Die beiden Hauptkrümmungsradien sind einander gleich und es besteht daher zwischen der totalen und der mittleren Krümmung der Fläche die Relation

$$K = \frac{H^2}{4}.^2)$$

Das Quadrat des Längenelements lässt sich auch in der Form schreiben:

$$d s^2 = \frac{4}{K} \cdot \frac{d u \, d v}{(u - v)^2};$$

die Flächen mit einer Schar von Minimalgeraden gehören also zu denjenigen Flächen, deren Längenelement gleich wird dem der Kugel vom Radius 1, wenn man es mit der totalen Krümmung multipliziert.[3])

Soll die Krümmung auf der ganzen Fläche konstanten Wert K haben, so muss

$$\Omega_1 \Omega'_2 - \Omega_2 \Omega'_1 = \frac{2}{\sqrt{K}} \qquad (7)$$

sein.

Serret hat bereits im Jahre 1848[4]) als eine spezielle Lösung der Gleichung für die Flächen konstanter Krümmung

$$a^2 (r t - s^2) = -(1 + p^2 + q^2)^2$$

die Fläche erhalten:

---

[1]) P. Stäckel, „Beitr. z. Flächenth.“, Leipzg. Ber. 48. Bd. 1896, p. 483.

[2]) G. Scheffers, Diff. Geom. II, p. 240.

[3]) L. Raffy, „Étude sur les surf. imag. de Monge etc.“ Bull. de la soc. math. de France. Bd. 36, 1908, S. 179.

[4]) J. A. Serret, Note sur une équation aux dérivées partielles. Journ. de Liouville, XIII, 1848, S. 368.

$$\begin{aligned} y &= \lambda x + i a \sqrt{1+\lambda^2} - i(1+\lambda^2)\sqrt{1+\lambda^2}\, f'(\lambda), \\ z &= i x \sqrt{1+\lambda^2} - a\lambda + \lambda(1+\lambda^2) f'(\lambda) - f(\lambda), \end{aligned} \tag{8}$$

wo $f(\lambda)$ eine willkürliche Funktion darstellt. Die Linien $\lambda = \text{const.}$ sind offenbar Minimalgerade, die Flächen sind also identisch mit unseren Flächen (7).

3. Kapitel.

Die Verbiegung der Flächen mit einer Schar von Minimalgeraden.

1°. Die zuerst von Beltrami untersuchten Verbiegungen von Regelflächen unter vorgeschriebenen geometrischen Bedingungen, die sich auf die verschiedenen Gestalten der Direktrix beziehen, lassen sich ohne wesentliche Modifikation auch für die Regelflächen mit einer Schar von Minimalgeraden durchführen.

Da die Aufstellung der Gleichungen sowohl bei Darboux („Théorie des surf." Bd. III, S. 294, Paris 1894) wie auch bei Stäckel („Beitr. z. Flächenth.", Leipzig. Ber. 54, S. 108 ff., 1902), der die Darbouxsche Darstellung erwähnt, fortgeblieben ist, sei sie hier der Vollständigkeit halber nachgetragen.

Die zwei ersten Gleichungen des Systems (3) (S. 6)

$$E = \Sigma a^2 = 0, \quad A = \Sigma a'^2,$$

sind durch die Interpretation auf Seite 13 integriert. Für die b_1, b_2, b_3 ergeben dann die drei weiteren Gleichungen (3) die Lösung:

$$b'_1 = a_1 \frac{AC - B^2}{2AF} + a'_1 \frac{B}{A} + \frac{F}{A} s_1,$$

$$b'_2 = a_2 \frac{AC - B^2}{2AF} + a'_2 \frac{B}{A} + \frac{F}{A} s_2,$$

$$b'_3 = a_3 \frac{AC - B^2}{2AF} + a'_3 \frac{B}{A} + \frac{F}{A} s_3,$$

wo $s_1 = \frac{a'_2{}^2 + a'_3{}^2}{2\,a_1}$, $s_2 = \frac{a'_1{}^2 + a'_3{}^2}{2\,a_2}$, $s_3 = \frac{a'_1{}^2 + a'_2{}^2}{2\,a_3}$

gesetzt ist.[1])

Die Fälle $A = 0$ und $F = 0$, für welche die Lösung versagt, sind die oben erledigten und von der weiteren Untersuchung ausgeschlossenen Minimalebenen und die Zylinder von Minimalgeraden.

2^0. Fragen wir nach denjenigen Regelflächen mit einer Schar von Minimalgeraden, die auf Rotationsflächen verbiegbar sind, so ergibt sich zunächst, dass der erste Differentialparameter für die Krümmung K:

$$\Delta_1 K = \frac{2}{F}\,\frac{\partial K}{\partial u}\,\frac{\partial K}{\partial v},$$

wegen $\frac{\partial K}{\partial u} = 0$ verschwindet. Aber aus der Invarianteneigenschaft des Ausdrucks $\Delta_1 K$ bei der Verbiegung folgt, dass auf den zugehörigen Rotationsflächen der erste Differentialparameter für das Krümmungsmass verschwinden muss. Es

---

[1]) Die Auflösung wird rational, da der Koeffizient des quadratischen Glieds verschwindet. Macht man den Ansatz

$$b_i' = a_i F + a_i' \lambda + \xi_i,$$

so ergibt sich $\lambda = \frac{B}{A}$.

Für die ξ_1, ξ_2, ξ_3 bestehen dann die drei Gleichungen:

$$\Sigma a\,\xi = F,\ \Sigma a'\,\xi = 0,\ \Sigma \xi^2 = \frac{A\,C - B^2 - 2\,A\,F^2}{A} = \frac{H^2}{A}.$$

Diese führen auf die Relationen:

$$\xi_1 = a'_2\,\frac{F}{A_3} + \frac{A_1}{A_3}\,\xi_3$$

$$\xi_2 = -\,a'_1\,\frac{F}{A_3} - \frac{A_2}{A_3}\,\xi_3,$$

wo A_1, A_2, A_3 die Unterdeterminanten der Elemente der ersten Reihe von $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ a'_1 & a'_2 & a'_3 \end{vmatrix}$ sind. Für ξ_3 ergibt sich dann:

$$\frac{H^2}{A} = \xi_3{}^2\left[\frac{A_1{}^2 + A_2{}^2 + A_3{}^2}{A_3{}^2}\right] + 2\,\frac{F}{a_3}\,\xi_3 + F^2\,\frac{A - a'_3{}^2}{A_3{}^2}.$$

Der Faktor von $\xi_3{}^2$ verschwindet.

muss also auf ihnen eine Schar von Minimalkurven geben, längs welcher die totale Krümmung konstant ist. Das Krümmungsmass muss also überhaupt konstant sein, da die Flächen zwei Kurvenscharen enthalten, längs welcher die Flächenkrümmung sich nicht ändert.

Folglich sind unter den Flächen mit einer Schar von Minimalgeraden diejenigen von konstanter Krümmung (Serret) die einzigen, welche auf Rotationsflächen verbiegbar sind.

3°. Die Frage der Abwickelbarkeit zweier Minimalgeradenflächen aufeinander ist bereits durch Raffy in der Seite 19 zitierten Abhandlung erledigt worden. Die von ihm angegebene Reduktion des Längenelements auf die Form

$$ds^2 = 2\,du\,dv + [v\,u^2 + V(v)]\,dv^2$$

lässt sich in folgender Weise bewirken. Geht man aus von dem Längenelement (3) (S. 17)

$$ds^2 = -(v-\omega)^2\,\varphi\,du\,dv + [\omega'^2\,u^2 + 2\,u\,\omega'\,\varphi\,(v-\omega)]\,dv^2,$$

das sich wegen

$$K = \frac{4\,\omega'^2}{\varphi^2\,(v-\omega)^4}$$ [1])

auch in der Form schreiben lässt:

$$ds^2 = -2\frac{\omega'}{\sqrt{K}}\,du\,dv + \omega'^2\left[u^2 + 4\,\frac{u}{\sqrt{K}\,(v-\omega)}\right]dv^2,$$

so lässt sich dieses zunächst durch die Substitution

$$u = u_1 - \frac{2}{\sqrt{K}\,(v-\omega)}$$

in die Form bringen:

$$ds^2 = -\frac{2\,\omega'}{\sqrt{K}}\,du_1\,dv + [\omega'^2\,u_1^2 + W(v)]\,dv^2.$$

Setzt man dann

$$u_1 = u_2\,V_1(v_1) + V_2(v_1),$$
$$v = \psi(v_1),$$

so ergibt sich

[1]) G. Scheffers, Diff. Geom. II, S. 228.

$$K = v_1,$$
$$\psi' = -\frac{\sqrt{K}}{\omega' V_1},$$
$$V_1 = -\int V_2(v_1)\, v_1\, dv_1,$$

wo also V_2 willkürlich bleibt. Das Längenelement geht dadurch in die verlangte Form

$$ds^2 = 2\, du_2\, dv_1 + [v_1 u_2^2 + V(v_1)]\, dv_1^2$$

über.

Hat man also zwei Flächen mit den Längenelementen ds und $d\bar{s}$, so kommt, wie Raffy bemerkt, die Frage der Abwickelbarkeit auf die Bedingung $V = \bar{V}$ hinaus, wenn man die Krümmungen v und $\bar{v}$ der beiden Flächen einander gleich setzt.

4. Kapitel.

Parallelflächen von Flächen, die eine Schar von Minimalgeraden enthalten.

Die Krümmung $\bar{K}$ und die mittlere Krümmung $\bar{H}$ einer Parallelfläche im Abstande a drücken sich bekanntlich so aus:

$$\bar{K} = \frac{K}{1 - a\,H + a^2\,K},$$
$$\bar{H} = \frac{H - 2\,a\,K}{1 - a\,H + a^2\,K}. \qquad (1)$$

Ist die Ausgangsfläche eine Fläche mit einer Schar von Minimalgeraden, so ist $K = \frac{H^2}{4}$. Aus den Gleichungen (1) folgt dann, dass auch

$$\bar{K} = \frac{\bar{H}^2}{4}$$

ist. Daraus zieht Scheffers[1]) den Schluss „Wenn eine von zwei Parallelflächen eine Schar von Minimalgeraden enthält, so gilt dasselbe von der andern."

[1]) Scheffers, a. a. O. p. 241, Satz 107.

Dieser Satz ist einer einfachen Verallgemeinerung fähig, die wir in diesem Kapitel kurz erwähnen wollen. Wir betrachten zu der Fläche S mit einer ∞^1-Schar von Minimalgeraden eine Fläche $\bar{S}$, deren Abstand nicht konstant, sondern eine Ortsfunktion $\varphi(u, v)$ der Ausgangsfläche sei:

$$\bar{x} = x + \varphi(u, v)\, X, \text{ etc.}$$

Dann ist

$$\bar{x}_u = x_u + \varphi_u X + \varphi X_u$$

und es wird, wenn die Parameterlinien v der Ausgangsfläche die Minimalgeraden sind, wegen $\Sigma X_u^2 = 0$ und $\Sigma X_u x_u = 0$:

$$\bar{E} = \varphi_u^2.$$

Ist φ längs der Minimalgeraden konstant, also eine Funktion von v allein, so verschwindet $\bar{E}$ identisch. $\bar{L}$ lässt sich dann in die Form bringen:

$$\bar{L} = \Sigma X \bar{x}_{uu} = a \Sigma X x_{uu} - b \Sigma x_u x_{uu}.$$

Da die beiden dreigliedrigen Summen der rechten Seite verschwinden, so ist auch $\bar{L} = 0$ und die Parameterlinien v der Fläche $\bar{S}$ sind daher auch Minimalgerade.

Die Fundamentalgrösse $\bar{F}$ der Fläche S nimmt die Form an:

$$\bar{F} = F \left(1 - \frac{M}{F} \varphi\right)^2$$

oder in der gewöhnlichen Gestalt[1]):

$$\bar{F} = (1 - \varphi^2 K) F - \varphi (2 - \varphi H) M.$$

Ganz analog erhält man für $\bar{M}$:

$$\bar{M} = M \left(1 - \frac{M}{F} \varphi\right)$$

oder

$$\bar{M} = \varphi K F + (1 - \varphi H) M.$$

Die Form der Fundamentalgrössen $\bar{M}$ und $\bar{F}$ ist also genau dieselbe, wie bei einer Parallelfläche, deren konstanter Abstand φ ist. Entsprechend wird auch

$$\sqrt{\bar{E}\bar{G} - \bar{F}^2} = (1 - \varphi H + \varphi^2 K) \sqrt{EG - F^2}$$

und die Krümmung $\bar{K}$ sowie die mittlere Krümmung $\bar{H}$ erscheinen in der Form:

[1]) Siehe z. B. Scheffers, II p. 240.

$$\overline{K} = \frac{K}{1 - \varphi H + \varphi^2 K}$$

$$\overline{H} = \frac{H - 2\varphi K}{1 - \varphi H + \varphi^2 K}$$

Wählt man speziell als Funktion $\varphi(v)$ den Wert $\frac{1}{K} = R_1^2$, gleich dem Quadrat des Hauptkrümmungsradius der Fläche S, auf der $R_1 = R_2$, so wird

$$\overline{K} = K \frac{K}{1 - H + K}$$

$$\overline{H} = \frac{H}{2} \frac{H - 2K}{1 - H + K}$$

Wir können also das Resultat aussprechen:

Trägt man auf den Normalen einer Fläche S, die eine ∞^1-Schar von Minimalgeraden als Parameterlinien v enthält, solche Strecken ab, deren Länge eine beliebige Funktion $\varphi(v)$ ist, so sind auf der Fläche S der Endpunkte die Parameterlinien v gleichfalls Minimalgerade.

Die Krümmung der Fläche $\overline{S}$ längs einer Minimalgeraden ist gleich der Krümmung der durch diese Minimalgerade hindurchgehenden Parallelfläche der Fläche S. Ist die Funktion $\varphi(v) = R_1^2$, wo $\frac{1}{R_1^2} = K$, so ist die Krümmung dieser Fläche $\overline{S}$ gleich dem Produkt der Krümmungen der Fläche S und ihrer Parallelfläche im Abstand 1 und entsprechend die mittlere Krümmung gleich dem halben Produkte der mittleren Krümmungen dieser beiden Flächen.

5. Kapitel.

Die Flächen mit einer Schar von Minimalgeraden als Enveloppen einer ∞^1-Kugelschar.

Da die totale Krümmung der Flächen mit einer Schar von Minimalgeraden längs der Minimalgeraden konstant und $R_1 = R_2$ ist (s. S. 19), so reduzieren sich die beiden Evoluten-

mäntel auf eine Kurve.[1]) Diese bilden den Ort der Mitten der Kugeln

$$(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2 = R^2$$

als deren Enveloppe, wie eine einfache Rechnung zeigt, die Fläche aufgefasst werden kann.[2]) Dabei ergibt sich, dass

$$\xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2 - R'^2 = 0$$

ist, d. h. der Radius der Kugeln ist gleich der Bogenlänge der Kurve ihrer Mittelpunkte.

Ist diese Kurve eine gerade Linie,[3]) so reduzieren sich die beiden Mäntel der Kugelenveloppe auf die beiden Minimalgeraden, die durch den Schnittpunkt der Normalebene der Geraden (im Ausgangspunkt) gehen.

Liegt die Kurve der Kugelmittelpunkte in einer Minimalebene, so ist ihre Krümmung gleich Null,[4]) ihre Tangente bildet mit einer festen Richtung beständig den Winkel Null; der eine Mantel der Enveloppe reduziert sich daher auf eine Minimalgerade durch den Ausgangspunkt der „Zentrakurve".

Liegt die Zentrakurve in einer reellen Ebene, so ist jeder der beiden Mäntel symmetrisch zu dieser Ebene.

Ist $$\xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2 = 0,$$

so ist der Ort der Kugelmitten eine Minimalkurve, R' ist gleich Null, d. h. die Flächen sind von konstanter Krümmung.

Da auf den Kugelenveloppen das Krümmungsmass der Fläche längs einer Schar von Krümmungslinien konstant

---

[1]) Die Flächen mit einer Schar von Minimalgeraden gehören also zu den W-Flächen vom Typus $R_1 - R_2 = \text{const.}$, bilden aber eine Ausnahme vom Ribaucourschen Satz über das Entsprechen der Krümmungslinien auf den Evolutenmänteln, der nur für Constante $\neq 0$ seine Giltigkeit behält.

[2]) Monge, Application de l'analyse à la Géom. (5. Ausg. Paris 1850, S. 196—211) und P. Stäckel, Beitr. z. Flächenth. Leipzig. Ber. 54 Bd. 1902, S. 111.

[3]) Wenn der Ort der Kugelmitten eine Minimalgerade ist, z. B. $x_1 = t$, $y_1 = it$, dann reduzieren sich die beiden Mäntel gleichfalls auf zwei Minimalgerade $x + iy = 0$, die in zwei parallelen Ebenen $z = \pm r$ gelegen sind.

[4]) E. Study, „Krit. Betracht. etc." Jahresber. d. d. Math. Ver. 1908, Bd. 17, Leipzig. — Raffy L., „Contribut. à la Géom. des élem. isotropes." Bullet. d. Darboux XXXII. II sér. Sept. 1908, p. 264—278. Paris.

ist, und die Kugelenveloppen daher zu den Ribaucourschen Flächen gehören, bei denen die Haupttangentenkurven ein „Gewebe“ oder in der Bezeichnung von Scheffers ein „Kurvennetz ohne Umwege“ bilden, so erhebt sich die Frage, ob auch auf den Flächen mit einer Schar von Minimalgeraden die Haupttangentenkurven ein Gewebe bilden.

Die Bedingung dafür, dass zwei Kurvensysteme u = const., v = const., die sich unter einem Winkel ω schneiden, ein Gewebe bilden, ist[1])

$$[g_u - g_v] = 4 g_\psi \cos \frac{\omega}{2}, \qquad (1)$$

wo g_u, g_v die geodätischen Krümmungen der Kurven u und v sind, während g_ψ die geodätische Krümmung der den Winkel ω halbierenden Kurven bedeutet. Da die eine Schar der Haupttangentenkurven von den Minimalgeraden unserer Flächen gebildet wird, so kann man von dem Winkel der Haupttangentenkurven nicht reden. Eine Minimalgerade bildet mit jeder Richtung, die nicht parallel zu der Minimalebene läuft, welche die Minimalgerade enthält, einen Winkel ω, für welchen

$$\operatorname{tg} \omega = i$$

ist. Daher machen die Flächen mit einer Schar von Minimalgeraden als Kugelenveloppen eine Ausnahme von dem erwähnten Ribaucourschen Satz. Die Bedingung (1) wird, wenn u und v die Haupttangentenkurven sind, für die Flächen mit einer Schar von Minimalgeraden unbestimmt und man kann daher auf diesen Flächen von einem Gewebe nicht reden.

Nur in einem Falle kann, aber auch nur in uneigentlicher Weise, von einem Gewebe gesprochen werden. Die von Rothe[2]) aufgestellte Differentialgleichung für diejenigen

---

[1]) R. Rothe, „Über die Gewebe auf einer Fläche etc.“ Jahresber. d. d. Math. Ver., Bd. 18, 9./10. Heft, 1909.

[2]) R. Rothe, ebenda, p. 429.

Flächen, deren Krümmungslinien ein Gewebe bilden, wird durch die Flächen mit einer Schar von Minimalgeraden erfüllt:

$$\frac{\partial R_1}{\partial s_u} + \frac{\partial R_2}{\partial s_v} = 0,$$

wo s_u, s_v die Bogenlängen der Krümmungskurven sind. Abgesehen von diesem trivialen Falle existiert auf den Flächen mit einer Schar von Minimalgeraden kein Gewebe.

II. Teil.

1. Kapitel.

Die Flächen mit einer Schar von Minimalgeraden als erzeugende Flächen Ribaucourscher Strahlensysteme.

Die eine Schar der Haupttangentenkurven der Flächen mit einer Schar von Minimalgeraden wird durch die Minimalgeraden gebildet. Da die Flächenkrümmung längs der Minimalgeraden konstant ist, so lässt sich der Ausdruck für das Krümmungsmass der Fläche, bezogen auf die Haupttangentenkurven als Parameterlinien, in die Form bringen:

$$K = -\frac{1}{\Phi(v)^2}. \tag{1}$$

Diese Form des Krümmungsmasses K ist für die folgenden Untersuchungen von grösster Bedeutung.

Bekanntlich[1]) liefern die Lelieuvreschen Formeln eine auf ihre Haupttangentenkurven bezogene Fläche, deren Krümmungsmass durch

$$K = -\frac{1}{(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2)^2} \tag{2}$$

[1]) Bianchi, Vorlesungen, S. 132.

gegeben ist, wenn ξ, η, ζ drei linear unabhängige partikuläre Lösungen einer gegebenen Laplaceschen Gleichung

$$\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial u \partial v} = M \vartheta \tag{3}$$

sind, wo

$$M = \frac{1}{\sqrt{\rho}} \frac{\partial^2 \sqrt{\rho}}{\partial u \partial v} - \mathfrak{F}$$

ist. ρ ist definiert durch

$$K = -\frac{1}{\rho^2} \tag{4}$$

und $\mathfrak{F}$ ist der Koeffizient von $2\,du\,dv$ des Linienelements der sphärischen Abbildung der Fläche.

Die Form der Fundamentalgrössen E, F, G und L, M, N der Flächen mit einer Schar von Minimalgeraden ist für die Haupttangentenkurven als Parameterlinien bereits von Stäckel[1]) entwickelt worden.

Ist $\rho^2 = -e^{2m(v)}$ gesetzt, so ist die Darstellung von Stäckel

$$\begin{gathered} E = 0, \quad F = \frac{2\rho^2}{(u+v)^2}, \quad G = -\frac{2\rho\rho'}{u+v} + n(v), \\ L = 0, \qquad M = -\frac{2i\rho}{(u+v)^2}, \qquad N = 0. \end{gathered} \tag{5}$$

$m(v)$ und $n(v)$ sind willkürliche Funktionen des Parameters v. Die Fundamentalgrössen der sphärischen Abbildung werden damit:

$$\mathfrak{E} = 0, \ \mathfrak{F} = -\frac{2}{(u+v)^2}, \ \mathfrak{G} = \frac{1}{\rho^2}\left(-\frac{2\rho\rho'}{u+v} + n(v)\right), \tag{6}$$

und die Laplacesche Gleichung gewinnt die bekannte Form:

$$\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial u \partial v} = \frac{2}{(u+v)^2}\vartheta. \tag{7}$$

Das allgemeine Integral dieser Gleichung[2]) lautet:

[1]) P. Stäckel, Beitr. z. Flächentheorie, Leipziger Ber., Bd. 48, 1896, S. 482.

[2]) Darboux, Leçons III, Nr. 389, S. 143.

$$\vartheta = 2\,\frac{U+V}{u+v} - U' - V', \tag{8}$$

wo U(u) und V(v) willkürliche Funktionen ihrer Argumente sind.

Wir wollen im folgenden [1]) die interessanten Eigenschaften der Flächen mit einer Schar von Minimalgeraden entwickeln, welche sich an die Gleichung (7) und ihr Integral (8) anschliessen und im wesentlichen bedingt sind durch die Form, welche das Krümmungsmass der zu betrachtenden Flächen annimmt, wenn sie auf ihre Haupttangentenkurven bezogen werden.

Sei S eine Fläche mit einer Schar von ∞^1 Minimalgeraden, $\bar{S}$ die ihr durch Orthogonalität der Längenelemente entsprechende Fläche. Wir betrachten ein Strahlensystem, dessen Erzeugende durch die Punkte der Fläche $\bar{S}$ parallel zu den Normalen in den entsprechenden Punkten der Fläche S gehen. Die Fläche S, welche die erzeugende Fläche des Strahlensystems heisse, sei auf ihre Haupttangentenkurven bezogen. Dann werden die Gleichungen [2]) für die Ableitungen der Koordinaten der Fläche S mit Rücksicht auf (5):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{x}}{\partial u} &= \sqrt{\rho}\,(X\vartheta_u - \vartheta X_u), \\ \frac{\partial \bar{x}}{\partial v} &= -\sqrt{\rho}\,(X\vartheta_v - \vartheta X_v - \frac{\rho'}{2\rho}\vartheta X), \end{aligned} \tag{9}$$

und entsprechend vier weitere Gleichungen für $\bar{y}$ und $\bar{z}$. Bestimmen wir dann die Fundamentalgrössen für das Strahlensystem

$$\mathfrak{E} = \Sigma\left(\frac{\partial X}{\partial u}\right)^2,\ \mathfrak{F} = \Sigma\,\frac{\partial X}{\partial u}\frac{\partial X}{\partial v},\ \mathfrak{G} = \Sigma\left(\frac{\partial X}{\partial v}\right)^2 \tag{10}$$

und

$$\begin{aligned} e &= \Sigma\,\frac{\partial \bar{x}}{\partial u}\frac{\partial X}{\partial u},\ f = \Sigma\,\frac{\partial \bar{x}}{\partial v}\frac{\partial X}{\partial u}, \\ f' &= \Sigma\,\frac{\partial \bar{x}}{\partial u}\frac{\partial X}{\partial v},\ g = \Sigma\,\frac{\partial \bar{x}}{\partial v}\frac{\partial X}{\partial v}, \end{aligned} \tag{11}$$

[2]) Für das Folgende vergl. Bianchi, Vorles. üb. Different. Geom. II. Aufl. 1910, insbesondere Kapitel X bis XIII.

[3]) Bianchi, Vorlesungen, S. 296.

so ergibt sich für $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{G}$ das System (6) und für e, f, f', g

$$e = 0,\ f = -\frac{2\sqrt{\rho}\,\vartheta}{(u+v)^2},\ f' = \frac{2\sqrt{\rho}\,\vartheta}{(u+v)^2},\ f + f' = 0,$$
$$g = \frac{1}{\rho^2}\left(-\frac{2\rho\rho'}{u+v} + n(v)\right)\sqrt{\rho}\,\vartheta. \tag{12}$$

Es nehmen daher die beiden simultanen quadratischen Differentialformen der Strahlenkongruenz:

$$ds_1^2 = \mathfrak{E}\,du^2 + 2\mathfrak{F}\,du\,dv + \mathfrak{G}\,dv^2 \tag{13}$$
$$\Sigma\, d\bar{x}\, dX = e\,du^2 + (f + f')\,du\,dv + g\,dv^2 \tag{14}$$

die Form an:

$$ds_1^2 = -\frac{4}{(u+v)^2}du\,dv + \frac{1}{\rho^2}\left(-\frac{2\rho\rho'}{u+v} + n(v)\right)dv^2, \tag{13*}$$
$$\Sigma\, d\bar{x}\, dX = \frac{1}{\rho^2}\left(-\frac{2\rho\rho'}{u+v} + n(v)\right)\sqrt{\rho}\,\vartheta\,dv^2. \tag{14*}$$

„Hat man zwei binäre quadratische Differentialformen, von denen wenigstens eine definit ist, so kann man (vergl. Bianchi, Vorlesungen, S. 53 ff.) durch eine reelle Transformation der Veränderlichen gleichzeitig beide Formen auf die Orthogonalform bringen. Die neu einzuführenden Veränderlichen sind diejenigen, welche, gleich Konstanten gesetzt, die Integrale der quadratischen Gleichung liefern, die sich durch Nullsetzen der Jacobischen Determinante der beiden Formen ergibt."

Sind $a_{11}\,dx_1^2 + 2a_{12}\,dx_1\,dx_2 + a_{22}\,dx_2^2 = \varphi$
$b_{11}\,dx_1^2 + 2b_{12}\,dx_1\,dx_2 + b_{22}\,dx_2^2 = \psi$

die beiden Formen, von denen wenigstens die Diskriminante der ersten, $a \equiv a_{11}a_{22} - a_{12}^2$ von Null verschieden sei, so ist die Jacobische Determinante:

$$\begin{vmatrix} a_{11}\,dx_1 + a_{12}\,dx_2,\ a_{21}\,dx_1 + a_{22}\,dx_2 \\ b_{11}\,dx_1 + b_{12}\,dx_2,\ b_{21}\,dx_1 + b_{22}\,dx_2 \end{vmatrix}.$$

Diese reduziert sich in unserem Falle auf:

$$a_{12}\,b_{22}\,dx_2^2.$$

Die Wurzeln der Gleichung für $\frac{dx_2}{dx_1}$:

$$a_{12}\, b_{22} \left(\frac{dx_2}{dx_1}\right)^2 = 0$$

sind daher nicht voneinander verschieden.

Die nach dem Satz von Bianchi neu einzuführenden Veränderlichen wären hier also $x_2 = \text{const.}$, das entspricht

$$v = \text{const.}$$

D. h. die gleichzeitige Reduktion ist in unserem Falle nicht möglich.

Da die Funktionaldeterminante der beiden Formen nicht identisch verschwindet, so liegt auch keine isotrope Strahlenkongruenz vor.

Um das hier auftretende Strahlensystem näher zu studieren, bezeichnen wir mit dp die unendlich kleine Länge des kleinsten Abstandes des Strahles (u, v) von dem unendlich benachbarten. Für diesen Abstand erhält man den Ausdruck:

$$dp = \frac{f' - f}{i} \frac{du\,dv}{\sqrt{2\mathfrak{F}\,du\,dv + \mathfrak{G}\,dv^2}}. \tag{16}$$

Für die Grenzpunkte tritt bei unserem Strahlensystem ein bemerkenswerter Ausnahmefall ein, der, wie es scheint, bisher noch nicht erörtert worden ist.

Wir gehen aus von der gewöhnlichen Form der Gleichung für die Abszisse r der Fusspunkte der kleinsten Abstände des Strahles (u, v) von den unendlich benachbarten Strahlen:

$$r = -\frac{e\,du^2 + (f + f')\,du\,dv + g\,dv^2}{\mathfrak{E}\,du^2 + 2\mathfrak{F}\,du\,dv + \mathfrak{G}\,dv^2} \tag{17}$$

oder:

$$r = -\frac{e + (f + f')\,k + g\,k^2}{\mathfrak{E} + 2\mathfrak{F}\,k + \mathfrak{G}\,k^2}, \tag{17*}$$

wobei wir mit k bezeichnen

$$k = \frac{dv}{du}.$$

Die Abszisse r ist also eine quadratisch gebrochene Funktion von k und erreicht für zwei Werte von k ein Maximum oder Minimum.

Eine Ausnahme tritt ein, wenn die Gleichung (17*) k nur scheinbar enthält. Dies tritt ein, wenn zwischen den Fundamentalgrössen des Zählers und Nenners die Relation besteht:

$$e : \frac{f + f'}{2} : g = \mathfrak{E} : \mathfrak{F} : \mathfrak{G}. \qquad (18)$$

Bekanntlich liefert dieser Ausnahmefall die zuerst von Ribaucour untersuchten isotropen Kongruenzen, bei denen die Grenzpunkte auf jedem Strahl in einen einzigen Punkt zusammenfallen, in welchen auch die Fusspunkte aller Minimalabstände des Strahles von den unendlich benachbarten Strahlen fallen.

Die Gleichung (17*) ist aber auch noch einer zweiten wichtigen Ausnahme fähig, welche eintritt, wenn sich die rechte Seite durch einen in k linearen Faktor kürzen lässt. Da bei uns

$$e = 0, \; f + f' = 0, \; \mathfrak{E} = 0 \qquad (19)$$

ist, so liegt dieser Fall offenbar bei unseren Strahlensystemen vor, allerdings scheinbar nur für das gewählte Bezugsystem. In der Tat aber ist die Beziehung, dass die beiden Formen (13*) und (14*) einen in $\frac{dv}{du}$ linearen Faktor gemeinsam haben, invariant, wovon man sich auch noch durch Einführung neuer Parameter $u = u(\bar{u}, \bar{v})$, $v = v(\bar{u}, \bar{v})$ überzeugen kann.

Es erhebt sich nun die Frage,

1. ob es ausser den von uns behandelten Ribaucourschen Kongruenzen, bei denen also die erzeugende Fläche eine und nur eine Schar von Minimalgeraden enthält, noch andere *Ribaucour*sche Kongruenzen gibt, bei denen die Abszisse r der Fusspunkte der kleinsten Abstände des Strahles (u, v) von den benachbarten eine *lineare* Funktion der zugehörigen Richtung $\left(\frac{dv}{du}\right)$ ist;

2. ob es überhaupt ausser den erwähnten Strahlensystemen noch andere mit der verlangten Eigenschaft gibt.

Um die erste Frage zu beantworten, stellen wir ganz allgemein die Kummerschen Fundamentalgrössen für Ribaucoursche Strahlensysteme auf. Diese sind[1]):

$$\begin{aligned} e &= \frac{\mathfrak{F}L - \mathfrak{E}M}{\sqrt{\mathfrak{E}\mathfrak{G} - \mathfrak{F}^2}} \frac{\vartheta}{\sqrt{\rho}}, \quad f = \frac{\mathfrak{F}M - \mathfrak{E}N}{\sqrt{\mathfrak{E}\mathfrak{G} - \mathfrak{F}^2}} \frac{\vartheta}{\sqrt{\rho}}, \\ f' &= \frac{\mathfrak{G}L - \mathfrak{F}M}{\sqrt{\mathfrak{E}\mathfrak{G} - \mathfrak{F}^2}} \frac{\vartheta}{\sqrt{\rho}}, \quad g = \frac{\mathfrak{G}M - \mathfrak{F}N}{\sqrt{\mathfrak{E}\mathfrak{G} - \mathfrak{F}^2}} \frac{\vartheta}{\sqrt{\rho}}. \end{aligned} \tag{20}$$

Soll sich nun der Ausdruck (17*) durch einen in k linearen Faktor kürzen lassen, so muss die Bedingung erfüllt sein:

$$4\left[\mathfrak{E}\frac{f+f'}{2} - \mathfrak{F}e\right]\left[\mathfrak{F}g - \mathfrak{G}\frac{f+f'}{2}\right] - \left[\mathfrak{G}e - \mathfrak{E}g\right]^2 = 0. \tag{21}$$

Um zu erfahren, welche Klassen der Ribaucourschen Strahlensysteme die Eigenschaft haben, dass der Ausdruck für die Abszisse r linear wird, setzen wir die Fundamentalgrössen (20) in die Bedingung (21) ein. Diese wird dadurch:

$$[\mathfrak{E}\mathfrak{G}L - \mathfrak{E}^2N - 2\mathfrak{F}^2L + 2\mathfrak{E}\mathfrak{F}M]\,[2\mathfrak{F}\mathfrak{G}M - 2\mathfrak{F}^2N - \mathfrak{G}^2L + \mathfrak{E}\mathfrak{G}N] - [\mathfrak{F}\mathfrak{G}L - 2\mathfrak{E}\mathfrak{G}M + \mathfrak{E}\mathfrak{F}N]^2 = 0.$$

Multipliziert man alles aus, so lässt sich diese Bedingung folgendermassen schreiben:

$$(\mathfrak{E}\mathfrak{G} - \mathfrak{F}^2)[-\mathfrak{E}^2N - \mathfrak{G}^2L - 4\mathfrak{E}\mathfrak{G}M^2 - 4\mathfrak{F}^2LN + 4\mathfrak{F}\mathfrak{G}LM + 4\mathfrak{E}\mathfrak{F}MN + 2\mathfrak{E}\mathfrak{G}LN] = 0.$$

Durch passende Ergänzung kann man diese leicht auf die Form bringen:

$$(\mathfrak{E}\mathfrak{G} - \mathfrak{F}^2)[(\mathfrak{E}N + \mathfrak{G}L - 2\mathfrak{F}M)^2 - 4(\mathfrak{E}\mathfrak{G} - \mathfrak{F}^2)(LN - M^2)] = 0. \tag{22}$$

Es ist also entweder

$$\mathfrak{E}\mathfrak{G} - \mathfrak{F}^2 = 0, \tag{23}$$

ein Fall, den wir ausschliessen, da für ihn die Gleichungen (20) ihren Sinn verlieren. Strahlensysteme dieser Art werden von

---

[1]) Bianchi, Vorlesungen, S. 308.

den Erzeugenden einer ∞^1-Schar von Zylindern gebildet (Bianchi, Vorlesungen S. 264).[1])

Die zweite Klammer

$$(\mathfrak{E}N + \mathfrak{G}L - 2\mathfrak{F}M)^2 - 4(\mathfrak{E}\mathfrak{G} - \mathfrak{F}^2)(LN - M^2) = 0 \quad (24)$$

ist aber eine bekannte Relation. Sie ist die Bedingung dafür, dass die Hauptkrümmungsradien der erzeugenden Fläche in jedem Punkte einander auch dem Zeichen nach gleich sind.[2]) Aber die einzigen Flächen, bei denen dies der Fall ist, sind die Flächen mit lauter Nabelpunkten, d. h. die Kugeln und Ebenen, und die Flächen mit einer Schar von Minimalgeraden. Die ersteren, als erzeugende Flächen Ribaucourscher Strahlensysteme gewählt, liefern bekanntlich die isotropen Kongruenzen, den ersten der erwähnten Ausnahmefälle (S. 33).

Die Flächen mit einer Schar von Minimalgeraden als erzeugende Flächen Ribaucourscher Kongruenzen führen zu den von uns behandelten Kongruenzen.

Es sind also, von den isotropen Strahlensystemen abgesehen, bei denen die Grenzpunkte auf jedem Strahl in einen einzigen Punkt zusammenfallen, unter den Ribaucourschen Kongruenzen diejenigen, deren erzeugende Flächen eine Schar von Minimalgeraden enthalten, die einzigen, bei denen keine Grenzpunkte existieren, sondern die Abszisse der Fusspunkte der kleinsten Abstände eines Strahles (u, v) von den unendlich benachbarten eine lineare Funktion der zugehörigen Tangentenrichtung (dv : du) auf der Ausgangsfläche wird.[3])

---

[1]) E. Study, Zur Differentialgeometrie der analytischen Kurven. Transactions of the Amer. Math. Soc. Bd. 10, 1909, S. 2, Anm. †.

[2]) Vergl. z. B. Bianchi, Vorlesungen S. 125.

[3]) Dies geht auch daraus hervor, dass irgend zwei der Bedingungen (19) in die allgemeinen Relationen (20) für Ribaucoursche Systeme eingeführt immer die dritte zur Folge haben (von den isotropen Kongruenzen und dem Falle $\mathfrak{E}\mathfrak{G} - \mathfrak{F}^2 = 0$ abgesehen). Aus

a) $\mathfrak{E} = 0$, $e = 0$ folgt: $L = 0$, $E = 0$ (E, F, G sind, wie man sich erinnert, die Fundamentalgrössen erster Ordnung der erzeugenden Fläche),

Um die zweite Frage zu erledigen, ob es überhaupt ausser den von uns hier aufgestellten Strahlensystemen noch solche gibt, bei denen die Fusspunktrelation sich durch einen in $\frac{dv}{du}$ linearen Faktor kürzen lässt, bringen wir die beiden Formen (13) und (14) auf die gemeinschaftliche Orthogonalform, bei der also

$$\mathfrak{F} = 0, \quad f + f' = 0$$

wird. Da wir ja eben von denjenigen Ribaucourschen Kongruenzen absehen, für welche diese Transformation unmöglich ist, und feststellen wollen, ob es ausser ihnen noch solche mit der fraglichen Eigenschaft gibt, ist diese Reduktion durchführbar (S. 31). Die Bedingung (21) nimmt aber dann die Gestalt an:

$$\mathfrak{G}e - \mathfrak{E}g = 0$$

oder

$$e : g = \mathfrak{E} : \mathfrak{G}.$$

Das ist aber der Fall der isotropen Kongruenzen, bei denen die Grenzpunkte auf jedem Strahl in einen einzigen Punkt zusammenfallen.

Es gibt also ausser den von uns aufgestellten Ribaucourschen Kongruenzen, deren erzeugende Flächen eine und nur eine Schar von Minimalgeraden enthalten, *keine weiteren Strahlensysteme,* weder Ribaucoursche noch allgemeinere, bei denen der Ausdruck für die Abszisse r

$$r = \frac{e\,du^2 + (f + f')\,du\,dv + g\,dv^2}{\mathfrak{E}\,du^2 + 2\mathfrak{F}\,du\,dv + \mathfrak{G}\,dv^2}$$

sich durch einen in $\frac{dv}{du}$ linearen Faktor kürzen lässt. Es lässt sich diese Eigenschaft auch so ausdrücken: Das

---

also eine Fläche mit einer ∞^1-Schar von Minimalgeraden. $\mathfrak{F} = 0$ ist wegen $\mathfrak{E}\mathfrak{G} - \mathfrak{F}^2 = 0$ der ausgeschlossene Fall;

b) $\mathfrak{E} = 0$, $f + f' = 0$ liefert $e = 0$, oder $\mathfrak{G} = 0$, was aber nur im ausgeschlossenen Falle noch der fraglichen Fusspunktrelation genügt;

c) ist endlich $e = 0$, $f + f' = 0$, so folgt aus (20): $\mathfrak{E} = 0$, also die in Rede stehenden Strahlensysteme oder $\mathfrak{F}N - M\mathfrak{G} = 0$, d. h. $g = 0$, also die isotropen.

Doppelverhältnis der vier Fusspunkte der kleinsten Abstände eines Strahles (u, v) von vier benachbarten Strahlen ist gleich dem Doppelverhältnis der vier zugehörigen Tangentenrichtungen auf der Ausgangsfläche.

Da die Relation (21) unabhängig von der Wahl der Parameter für die Strahlensysteme, die wir behandeln, besteht, so ist sie geeignet, als Definition dieser Systeme zu dienen.

Der Ausnahmefall, auf den wir hier gestossen sind, ist ganz analog dem, der für die Hauptkrümmungsrichtungen einer Fläche eintritt, wenn der Ausdruck für die Krümmung eines Normalschnitts

$$\frac{1}{R} = \frac{L + 2Mk + Nk^2}{E + 2Fk + Gk^2}$$

sich durch einen in k linearen Faktor kürzen lässt. Dieser Ausnahmefall ist von Stäckel[1]) untersucht worden.

---

[1]) Stäckel, Beitr. zur Flächenth. (die auf S. 29 zitierte Abhandlung); vgl. auch die Darstellung bei Scheffers „Einführung in die Theorie der Flächen", 1902, Leipzig, S. 113 f., speziell den Satz 10: „Diejenigen Flächen, bei denen in jedem Punkt das Krümmungsmaß eines Normalschnitts eine linear gebrochene Funktion der zugehörigen Tangentenrichtung (dv : du) ist, bei denen also vier Normalschnittebenen eines Punktes stets dasselbe Doppelverhältnis wie die vier zugehörigen Krümmungsmittelpunkte haben, sind identisch mit denjenigen Flächen, die eine Schar von Minimalgeraden und eine Schar von nicht-geraden Minimalkurven enthalten."

Es findet ein bemerkenswerter Dualismus statt zwischen den Flächen mit Nabelpunkten, die der Relation

$$L : M : N = E : F : G$$

und den isotropen Strahlensystemen, die der Relation

$$e : \frac{f + f'}{2} : g = \mathfrak{E} : \mathfrak{F} : \mathfrak{G}$$

genügen, und zwischen den Flächen mit einer Schar von Minimalgeraden, die der Relation

$$4(EM - FL)(FN - GM) - (GL - EN)^2 = 0$$

entsprechen, und denjenigen Ribaucourschen Strahlensystemen, deren erzeugende Flächen eine Schar von Minimalgeraden enthalten, und die der Gleichung genügen:

$$4\left[\mathfrak{E}\left(\frac{f + f'}{2}\right) - \mathfrak{F}e\right]\left[\mathfrak{F}g - \mathfrak{G}\left(\frac{f + f'}{2}\right)\right] - \left[\mathfrak{G}e - \mathfrak{E}g\right]^2 = 0.$$

Wir gehen nunmehr dazu über, weitere Eigenschaften der von uns bestimmten Ribaucourschen Systeme festzustellen. Dazu fragen wir nach den Brennflächen der Strahlenkongruenz. Die Gleichung, welche die Abszissen σ der Brennpunkte eines Strahles (u, v) eines allgemeinen Strahlensystems bestimmt, lautet:

$$(\mathfrak{E}\mathfrak{G} - \mathfrak{F}^2)\sigma^2 + [\mathfrak{g}\mathfrak{E} - (\mathfrak{f} + \mathfrak{f}')\mathfrak{F} + \mathfrak{e}\mathfrak{G}]\sigma + \mathfrak{e}\mathfrak{g} - \mathfrak{f}\mathfrak{f}' = 0.$$

Sie reduziert sich in unserem Falle auf:

$$\sigma^2 = -\frac{\mathfrak{f}\mathfrak{f}'}{\mathfrak{F}^2} \tag{25}$$

oder:

$$\begin{aligned} \sigma &= \pm\sqrt{\rho}\,\vartheta, \text{ also} \\ \sigma_1 &= \sqrt{\rho}\,\vartheta \\ \sigma_2 &= -\sqrt{\rho}\,\vartheta. \end{aligned} \tag{25*}$$

Die Koordinaten der Brennflächen sind daher

$$\begin{aligned} \mathfrak{x} &= \bar{x} \pm \sqrt{\rho}\,\vartheta\, X \\ \mathfrak{y} &= \bar{y} \pm \sqrt{\rho}\,\vartheta\, Y \\ \mathfrak{z} &= \bar{z} \pm \sqrt{\rho}\,\vartheta Z. \end{aligned}$$

Daraus folgt für den einen Brennflächenmantel F_1

$$\mathfrak{x}_u = 2\sqrt{\rho}\,\vartheta\, X_u \text{ u. s. w.}$$

$$\mathfrak{x}_v = 2\sqrt{\rho}\,\vartheta\left(X_v + \frac{\rho'}{2\rho} X\right) \text{ u. s. w.,}$$

für den anderen Brennflächenmantel F_2 ergibt sich

$$\mathfrak{x}_u = -2\sqrt{\rho}\,\vartheta X_u \text{ u. s. w.}$$

$$\mathfrak{x}_v = -2\sqrt{\rho}\, X\vartheta_v \text{ u. s. w.}$$

Da

$$\Sigma X_u^2 = 0, \ \Sigma X X_u = 0.$$

so sieht man unmittelbar, dass für diesen zweiten Brennflächenmantel F_2 die Fundamentalgrössen $\mathfrak{e}$, $\mathfrak{f}$, $\mathfrak{g}$ die Werte annehmen:

$$\mathfrak{e} = 0, \ \mathfrak{f} = 0, \ \mathfrak{g} = 4\rho\,\vartheta_v^2.$$

Es ist also

$$\mathfrak{e}\mathfrak{g} - \mathfrak{f}^2 = 0, \tag{26}$$

die zweite Brennfläche F_2 ist daher nach S. 15 eine Minimaldeveloppable.

Der andere Brennflächenmantel F_1 ist dagegen, wie man leicht sieht, keine isotrope Developpable. Bei den isotropen Strahlensystemen sind bekanntlich beide Brennflächenmäntel Minimaldeveloppable, bei den hier vorliegenden hat nur der eine der beiden Mäntel diese Eigenschaft.

Die abwickelbaren Flächen unserer Strahlensysteme genügen der Gleichung

$$\mathfrak{F}\,(f' - f)\,du\,dv = 0. \qquad (27)$$

Diese ergibt sich aus der für allgemeine Strahlensysteme geltenden Differentialgleichung der abwickelbaren Flächen

$$(f'\mathfrak{E} - e\mathfrak{F})\,du^2 + [g\mathfrak{E} + (f' - f)\mathfrak{F} - e\mathfrak{G}]\,du\,dv + [g\mathfrak{F} - f\mathfrak{G}]\,dv^2 = 0$$

unter Berücksichtigung der Gleichungen (6) und (12). Die eine Schar der abwickelbaren Flächen unserer Strahlensysteme wird also durch die Flächen

$$v = \text{const.},$$

die andere durch die Flächen

$$u = \text{const.}$$

gebildet. Da für $du = 0$ der Fusspunkt des kleinsten Abstandes, d. h. der Schnittpunkt eines Strahles mit dem auf der abwickelbaren Fläche $u = \text{const.}$ benachbarten Strahl die Abszisse hat [nach (17)]:

$$r = -\sqrt{\rho}\,\vartheta = \sigma_2, \qquad \text{(nach 25*)}$$

so liegt die Rückkehrkurve auf dem zweiten Brennflächenmantel F_2. Die Brennebenen des zweiten Mantels sind also dadurch bestimmt, dass sie durch die drei Punkte

$$x, \bar{y}, \bar{z};\quad \mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z};\quad \mathfrak{x} + \frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial u}du,\ \mathfrak{y} + \frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial u}du,\ \mathfrak{z} + \frac{\partial \mathfrak{z}}{\partial u}du$$

gehen. Sie lassen sich daher in der Form schreiben:

$$\begin{vmatrix} x - \bar{x} & y - \bar{y} & z - \bar{z} \\ X & Y & Z \\ X_u & Y_u & Z_u \end{vmatrix} = 0.$$

Da die Summe der Quadrate der Koeffizienten von $x - \bar{x}$, $y - \bar{y}$, $z - \bar{z}$ verschwindet, so sind die Brennebenen

Minimalebenen. Dieses Resultat ist nach der Formel (26) selbstverständlich. Denn die Brennebenen durch einen Strahl (u, v) sind die Tangentialebenen an die Brennflächen in den Brennpunkten des Strahles. Die Brennebenen nach dem zweiten Brennflächenmantel F_2, der eine Minimaldeveloppable ist, müssen daher als Tangentialebenen einer isotropen Developpablen Minimalebenen sein.

Die Gleichung (27), welche die abwickelbaren Flächen unserer Strahlensysteme definiert, stimmt überein mit der Gleichung der Haupttangentenkurven der erzeugenden Fläche S. Die abwickelbaren Flächen schneiden daher die Ausgangsfläche $\bar{S}$, die der Fläche S durch Orthogonalität der Elemente entspricht, nach einem bekannten Satz[1]) in einem konjugierten System mit gleichen Invarianten.

In der Tat verifiziert man leicht mit Hilfe der Gleichungen (9), dass

$$\frac{\partial^2 \bar{x}}{\partial u \, \partial v} = \frac{\partial \log \vartheta}{\partial v} \frac{\partial \bar{x}}{\partial u} + \frac{\partial \log \vartheta}{\partial u} \frac{\partial \bar{x}}{\partial v}$$

ist, was ja die Behauptung bestätigt, dass auf der Fläche $\bar{S}$ den Haupttangentenkurven der Fläche S ein konjugiertes System mit gleichen Invarianten entspricht.

Fassen wir zusammen:

Enthält die erzeugende Fläche einer Ribaucourschen Kongruenz eine und nur eine Schar[2]) von Minimalgeraden, so ist auf jedem Strahle (u, v) der Kongruenz die Abszisse r der Fusspunkte der kleinsten Abstände des Strahles (u, v) von den ihm unendlich benachbarten eine lineare Funktion der den Nachbarstrahlen entsprechenden Tangentenrichtung auf der Ausgangsfläche. Das Doppelverhältnis der vier Fusspunkte der kleinsten Ab-

[1]) Bianchi, Vorlesungen, S. 307.

[2]) Enthält sie zwei Scharen, so ist sie eine Kugel und die Kongruenz ist isotrop.

stände eines Strahles (u, v) von vier benachbarten Strahlen ist gleich dem Doppelverhältnis der vier zugehörigen Tangentenrichtungen auf der Ausgangsfläche.

Diese Strahlensysteme sind definiert durch die Relation:

$$4\left[\mathfrak{E}\frac{(f+f')}{2}-\mathfrak{F}e\right]\left[\mathfrak{F}g-\mathfrak{G}\frac{(f+f')}{2}\right]-\left[\mathfrak{G}e-\mathfrak{E}g\right]^2=0,$$

unter der Voraussetzung, dass $\mathfrak{E}\mathfrak{G}-\mathfrak{F}^2\neq 0$ ist.

Der eine Brennflächenmantel dieser Strahlensysteme ist eine dem absoluten Kegelschnitt umschriebene Developpable.

Die abwickelbaren Flächen der Kongruenz entsprechen den Haupttangentenkurven der erzeugenden Fläche S und schneiden daher die Ausgangsfläche $\bar{S}$ in einem konjugierten System mit gleichen Invarianten.

Wir bezeichnen diese Systeme als „halbisotrope Ribaucoursche Kongruenzen".

2. Kapitel.

Die halbisotropen Strahlenkongruenzen und ihre Beziehung zur Theorie der dreifachen Orthogonalsysteme.

In einer Untersuchung „Über die dreifachen Orthogonalsysteme" (Liouville Journ. 1892) ist L. Lévy[1]) zu einem speziellen Resultat gelangt, das, wie es scheint, nicht beachtet worden ist. Lévy bestimmt die Kugelenveloppen, die durch eine Translation parallel der z-Achse die eine

[1]) Luc. Lévy, „Sur les systèmes tripl. orthog." Liouville Journ. 4e sér. VIII, S. 351, 1892. Dieses für die Theorie der Minimalgeradenflächen wichtige Ergebnis findet sich nicht in den „Historischen Bemerkungen" von P. Stäckel, Leipzg. Ber., 54. Bd., S. 118, 1902, auch nicht in den ausführlicheren vor kurzem erschienenen Untersuchungen L. Raffys „Étude sur les surf. imag. de Monge etc." Bull. de la soc. math. de France. Bd. 36, III.

Schar eines dreifachen Orthogonalsystems erzeugen; er findet als partikuläre Lösung, dass die Enveloppen der Kugeln

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2-R^2=0,$$

für welche

$$a'^2+b'^2+c'^2-R'^2=0$$

ist, durch die erwähnte Bewegung eine Lamésche Familie erzeugen.

Aus unserer Betrachtung über die Flächen mit einer Schar von Minimalgeraden als Kugelenveloppen (S. 26) geht hervor, dass die von Lévy bestimmten Flächen mit unseren Minimalgeradenflächen identisch sind.

Dieses Ergebnis legt die Vermutung nahe, dass die Flächen mit einer Schar von Minimalgeraden in Beziehung zu der Ribaucourschen Theorie der normalen Kreissysteme stehen. Wir untersuchen zunächst den Zusammenhang der im vorigen Kapitel aufgestellten halbisotropen Strahlensysteme mit dieser Theorie.

Die Bedingung dafür, dass ein Strahlensystem mit gegebenem sphärischen Bild der Developpabeln zyklisch sei, d. h. dass es ein normales Kreissystem gibt, dessen Achsen die Strahlen des Strahlensystems sind, hat die Form[1]):

$$\left[\frac{\partial\left\{\begin{matrix}1&2\\2\end{matrix}\right\}}{\partial v}-\frac{\partial\left\{\begin{matrix}1&2\\1\end{matrix}\right\}}{\partial u}\right]\cos\omega=\frac{\partial\left\{\begin{matrix}1&2\\1\end{matrix}\right\}}{\partial u}+\frac{\partial\left\{\begin{matrix}1&2\\2\end{matrix}\right\}}{\partial v}-4\left\{\begin{matrix}1&2\\1\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}1&2\\2\end{matrix}\right\}; \tag{1}$$

dabei ist ω der Winkel, den der Strahl (u, v) mit der Verbindungslinie seines Mittelpunktes $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ mit einem Punkte der Peripherie des zum Strahl (u, v) gehörigen Kreises des normalen Kreissystems bildet, also der halbe Gesichtswinkel des Kreises vom Strahlmittelpunkt aus. Dieser Winkel, der durch die Gleichung (1) bestimmt wird, ist natürlich im allgemeinen eine Funktion von u und v. ω muss ausserdem den Gleichungen:

[1]) Bianchi, Vorlesungen, S. 355.

$$\frac{\partial \cos \omega}{\partial u} = 2 (\cos \omega - 1) \left\{ \begin{matrix} 1\,2 \\ 2 \end{matrix} \right\},$$
$$\frac{\partial \cos \omega}{\partial v} = 2 (\cos \omega + 1) \left\{ \begin{matrix} 1\,2 \\ 1 \end{matrix} \right\} \qquad (2)$$

genügen. Wenn sich daraus für $\cos \omega$ ein Wert ergibt, so dass

$$| \cos \omega | \angle 1$$

ist, ist die vorgelegte Strahlenkongruenz einem und zwar im allgemeinen nur einem normalen Kreissystem zugeordnet.

Wir denken uns nun das Strahlensystem des vorigen Kapitels; u, v seien die sphärischen Bilder der Developpabeln des Systems, die den Haupttangentenkurven der erzeugenden Fläche entsprechen. Die in den Bedingungen (1) und (2) auftretenden Christoffelschen Symbole für das Linienelement der Bildkugel haben die Bedeutung:

$$\left\{ \begin{matrix} 1\,2 \\ 2 \end{matrix} \right\} = \frac{\mathfrak{E} \frac{\partial \mathfrak{G}}{\partial u} - \mathfrak{F} \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial v}}{2 (\mathfrak{E} \mathfrak{G} - \mathfrak{F}^2)} \qquad (3)$$

$$\left\{ \begin{matrix} 1\,2 \\ 1 \end{matrix} \right\} = \frac{\mathfrak{G} \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial v} - \mathfrak{F} \frac{\partial \mathfrak{G}}{\partial u}}{2 (\mathfrak{E} \mathfrak{G} - \mathfrak{F}^2)} \qquad (4)$$

Bei unseren halbisotropen Systemen verschwindet für die sphärischen Bilder der Developpabeln die Grösse $\mathfrak{E}$, es ist also

$$\left\{ \begin{matrix} 1\,2 \\ 2 \end{matrix} \right\} = 0. \qquad (5)$$

Die Bedingung (4) wird

$$\left\{ \begin{matrix} 1\,2 \\ 1 \end{matrix} \right\} = \frac{\frac{\partial \mathfrak{G}}{\partial u}}{2 \mathfrak{F}} = - \frac{\rho'}{2 \rho} \qquad (6)$$

Das in der Bedingung (1) auftretende Differential

$$\frac{\partial \left\{ \begin{matrix} 1\,2 \\ 1 \end{matrix} \right\}}{\partial u} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\mathfrak{G}_u}{\mathfrak{F}} \right)$$

wird also identisch gleich Null

$$\frac{\partial \left\{ \begin{matrix} 1\,2 \\ 1 \end{matrix} \right\}}{\partial u} = 0.$$

Das war von vornherein klar, da ja

$$\frac{\partial}{\partial v} \left\{ \begin{matrix} 1\,2 \\ 2 \end{matrix} \right\} = \frac{\partial}{\partial u} \left\{ \begin{matrix} 1\,2 \\ 1 \end{matrix} \right\}$$

die notwendige und hinreichende Bedingung dafür ist, dass die sphärischen Kurven u, v die Bilder der Haupttangentenkurven einer Fläche seien.[1])

Die Bedingung (1) wird damit identisch erfüllt, was auch $\cos \omega$ für einen Wert haben mag. Aus der ersten Gleichung (2) folgt aber wegen (5), dass $\cos \omega$ jedenfalls nur eine Funktion von v sein kann.

Wir untersuchen nun zunächst einen speziellen Fall, der sich aus der zweiten Gleichung (2) ersehen lässt. Diese ist offenbar auch erfüllt für den Wert[2])

$$\cos \omega = -1. \tag{7}$$

Da durch diesen Wert auch die erste Gleichung (2) befriedigt wird, so ist offenbar von den unendlich vielen normalen Kreissystemen, die sich unseren halbisotropen Strahlenkongruenzen zuordnen lassen, eines auch durch den konstanten Wert

$$\cos \omega = -1$$

gegeben.

Um die Eigenschaften des durch die Gleichung (7) definierten normalen Kreissystems kennen zu lernen, denken wir uns eine Fläche Σ, die zu den Kreisen orthogonal sei.[3])

---

[1]) Bianchi, Vorlesungen, S. 126.

[2]) Dieser Wert geht aus dem der zweiten Gleichung (2) entsprechenden allgemeinen $\cos \omega = \frac{c}{\rho} - 1$ hervor für den Wert $c = 0$ der Integrationskonstanten. Auf den allgemeinen Fall werden wir an anderer Stelle näher eingehen.

[3]) Für das Folgende ist zu verweisen auf die Arbeiten von A. Ribaucour: „Sur les faisceaux de cercles“ Par. C. R. 76, S. 830, 1873. — „Sur

Durch einen Punkt P dieser Fläche geht senkrecht zu ihr ein Kreis des Systems hindurch. Die Tangentialebene der Fläche Σ in P enthält dann die Achse des Kreises, d. h. den im Kreismittelpunkt auf der Kreisebene senkrechten Strahl (u, v). Zieht man durch den Punkt P die Tangenten an die Krümmungslinien der Fläche Σ, so treffen diese die Achse in den beiden Brennpunkten[1]) des Strahls. Da die Tangenten der Krümmungslinien einen rechten Winkel einschliessen, so ist, wenn R den Radius des Kreises, d den Abstand des Kreismittelpunkts vom Mittelpunkt der Achse und 2δ die Entfernung der Brennpunkte bedeuten

$$R^2 + d^2 = \delta^2$$

oder

$$d = \delta \cos \omega, \quad R = \delta \sin \omega. \tag{8}$$

Für das spezielle normale Kreissystem, das wir betrachten, besteht aber die Gleichung (7)

$$\cos \omega = -1.$$

Ausserdem ist nach S. 38

$$2\delta = 2\sqrt{\rho}\,\vartheta.$$

Es wird also nach (25*):

$$d = -\delta = -\sqrt{\rho}\,\vartheta = \sigma_2 \tag{9}$$

$$R = 0. \tag{10}$$

Die Kreise des dem Werte $\cos \omega = -1$ entsprechenden normalen Kreissystems, das sich unserer halbisotropen Strahlenkongruenz zuordnen lässt, sind daher Kreise vom Radius Null. Der Mittelpunkt der in je zwei Minimalgerade zerfallenden Kreise fällt [nach (25*) S. 38] mit dem einen Brennpunkt des Strahles (u, v) zusammen. Da die Brennfläche nach S. 38 eine Minimaldeveloppable ist, so ist die eine von diesen beiden Minimal-

---

la déformation des surfaces" Par. C. R. 70, S. 330, 1870. — „Mémoires sur la théorie générale des surfaces courbes" Journ. d. Math. (Liouville), 4e ser. VII, 1891, S. 219—270.

[1]) Bianchi, Vorlesungen, S. 352.

geraden identisch mit der in der Brennfläche gelegenen. Denn durch den Strahl (u, v) gehen nur zwei Minimalebenen; diese schneiden aus der Ebene des Nullkreises des Strahles (u, v) die beiden Minimalgeraden aus. Aber eine von den Minimalebenen ist nach S. 40 die Brennebene durch den Strahl (u, v), welche die Brennfläche F_2 berührt. Diese enthält die durch den Berührungspunkt des Strahles (u, v) mit der Brennfläche F_2 gehende Minimalgerade, die eine Erzeugende der Brennfläche ist. Diese eine Minimalgerade steht aber nach S. 16 auf der Brennfläche F_2 senkrecht, also ist die Brennfläche F_2 eine zu den ∞^2-Minimalgeraden des normalen Kreissystems vom Radius Null orthogonale Fläche. Dass nur eine der beiden Minimalgeraden, in die jeder Nullkreis zerfällt, auf der Fläche senkrecht steht, entspricht der Tatsache, dass auch die Kreise eines normalen Kreissystems im allgemeinen nur einmal auf der Orthogonalfläche senkrecht stehen.

Das dreifache Orthogonalsystem, das zu unserem normalen Kreissystem vom Radius Null gehört, ist nunmehr in folgender Weise bestimmt:

Wir betrachten eine der abwickelbaren Flächen $u = \text{const.}$ unseres halbisotropen Strahlensystems, sagen wir, die Fläche D_0, die dem Werte u_0 entspricht. Die Rückkehrkurve von D_0 ist auf der Brennfläche F_2 die entsprechende Kurve u_0. Längs dieser Kurve u_0 bilden die Minimalgeraden unseres zerfallenden Kreissystems eine abwickelbare Fläche, die zu der Brennfläche F_2 orthogonal ist (d. h. mit ihr zusammenfällt). Die Kurve u_0 ist eine orthogonale Trajektorie der Minimalgeraden $v = \text{const.}$ der Brennfläche F_2. Längs der Minimalgeraden wird die Brennfläche F_2 von den Strahlen der abwickelbaren Flächen $v = \text{const.}$ der halbisotropen Strahlenkongruenz berührt. Die Minimalgeraden des Kreissystems vom Radius Null stehen längs dieser Minimalgeraden $v = \text{const.}$ auf der Brennfläche senkrecht, bilden also eine Minimalebene. Das dreifache Orthogonalsystem wird daher gebildet von den Ortsflächen $u = \text{const.}$, $v = \text{const.}$ der Minimal-

geraden des Nullkreissystems und der Brennfläche F_2 der halbisotropen Strahlenkongruenz.

Die normalen Kreissysteme vom Radius Null, zu denen wir hier gelangt sind, stellen ein neues Beispiel der Zykelsysteme von konstantem Radius dar, das, wie es scheint, bisher nicht behandelt worden ist. Eine erschöpfende Behandlung dieser Systeme ist eine Untersuchung für sich, deren Umfang den hier gezogenen Rahmen bei weitem überschreiten würde.[1]) Dass der Fall $R = 0$ eine gesonderte Behandlung erfordert, hat bereits A. Ribaucour selbst in seinem «Mémoire sur la théorie générale des surfaces courbes» Kapitel XIII, Art. 124, S. 256 bemerkt, doch sind mir Untersuchungen darüber nicht bekannt geworden.

Wir können zusammenfassend folgendes Ergebnis feststellen:

Unter den unendlich vielen normalen Kreissystemen, die sich den halbisotropen Ribaucourschen Kongruenzen zuweisen lassen, ist insbesondere eines vom konstanten Radius Null. Dieses entspricht dem Werte

$$\cos \omega = -1.$$

Die Mittelpunkte der in Minimalgerade zerfallenden Kreise bilden den isotropen Brennflächenmantel der halbisotropen Strahlenkongruenz, die durch die Achsen der Kreise gebildet wird. Die Ortsflächen $u = \text{const.}$, $v = \text{const.}$ der Minimalgeraden erzeugen mit dem isotropen Brennflächenmantel ein

---

[1]) Ich behalte mir vor, an anderer Stelle auf die normalen Kreissysteme vom Radius Null zurückzukommen. Ihr Studium beruht auf der Untersuchung der Bedingungen $\left\{ \begin{matrix} 1\,2 \\ 2 \end{matrix} \right\} = 0$ oder $\left\{ \begin{matrix} 1\,2 \\ 1 \end{matrix} \right\} = 0$. Sind beide erfüllt, was die pseudosphärischen Flächen charakterisiert, so wird man auf Guichardsche Systeme geführt. Die Lösung $\mathfrak{E} = 0$ der ersten gibt (unter der Voraussetzung $\mathfrak{E}\mathfrak{G} - \mathfrak{F}^2 \neq 0$) unsern Fall. — Die Klasse der hier auftretenden Flächen ist dadurch bestimmt, dass für sie die totale Krümmung längs einer Schar der Haupttangentenkurven konstant bleibt.

dreifaches Orthogonalsystem, das also durch die Minimalebenen v = const. und durch die (miteinander identischen) Minimaldeveloppabeln u = const. und durch die zweite Brennfläche gebildet wird.

3. Kapitel.

Die zu den Flächen mit einer Schar von Minimalgeraden assoziierten Flächen.

Mit Hilfe der in den beiden vorhergehenden Kapiteln aufgestellten Beziehungen können wir die Frage nach der Enveloppe der Kreisebenen der einem halbisotropen Strahlensystem zugeordneten normalen Kreissysteme ohne Schwierigkeit erledigen.

Wir betrachten zunächst die Ebenen der Nullkreise des im vorigen Kapitel aufgestellten normalen Kreissystems vom Radius Null, was ja für die Frage der Enveloppe keine Einschränkung der Allgemeinheit bedeutet, solange uns nur das den Developpabeln des halbisotropen Strahlensystems auf der Enveloppe entsprechende System interessiert.

Denken wir uns durch den Koordinatenanfang eine Ebene parallel der Ebene des Nullkreises des Strahles (u, v) unserer halbisotropen Kongruenz gelegt. Diese Ebene, deren Normale die Richtungscosinus X, Y, Z des Strahles (u, v) hat, hat vom Mittelpunkt $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$ des Strahles den Abstand $\Sigma X \bar{x}$. Also hat die Nullkreisebene des Strahles (u, v) vom Anfangspunkt den Abstand

$$p = \Sigma X x + \sigma_2. \tag{1}$$

Nun ist mit Rücksicht auf die Gleichungen (6), (9) und (12) des 1. Kapitels leicht zu beweisen, dass p der Gleichung

$$\frac{\partial^2 p}{\partial u \, \partial v} = -\frac{p'}{2\rho} \frac{\partial p}{\partial u} + \frac{2}{(u+v)^2} p \tag{2}$$

genügt. Das ist aber die Laplacesche Gleichung

$$\frac{\partial^2 p}{\partial u \, \partial v} = \begin{Bmatrix} 1\,2 \\ 1 \end{Bmatrix} \frac{\partial p}{\partial u} + \begin{Bmatrix} 1\,2 \\ 2 \end{Bmatrix} \frac{\partial p}{\partial v} - \mathfrak{F} p, \tag{3}$$

woraus folgt, dass den abwickelbaren Flächen des halbisotropen Strahlensystems, die ja den Haupttangentenkurven der erzeugenden Fläche zugeordnet sind (S. 40), auf der Enveloppe der Kreisebenen des zugehörigen normalen Kreissystems vom Radius Null ein konjugiertes System entspricht.

Die Enveloppe der Kreisebenen entspricht aber der erzeugenden Fläche der halbisotropen Kongruenz durch Parallelismus der Normalen. Wenn sich zwei Flächen durch Parallelismus der Normalen in der Weise entsprechen, dass den Haupttangentenkurven auf der einen ein konjugiertes System auf der andern entspricht, so heissen die Flächen assoziiert.

Für die in der Anmerkung 2 auf S. 44 angegebenen normalen Kreissysteme, für welche

$$\cos\omega = \frac{c}{\rho} - 1$$

ist, ergibt sich bezüglich der Enveloppen der Kreisebenen natürlich dasselbe Resultat. Die Kreisebenen haben hier vom Anfangspunkt den Abstand

$$p = \Sigma X\bar{x} + \sqrt{\rho}\,\vartheta\left(\frac{c}{\rho} - 1\right)$$

und man findet

$$p_{uv} = -\frac{\rho'}{2\rho}\left[\Sigma X_u \bar{x} + \frac{c}{\sqrt{\rho}}\vartheta_u\right]$$
$$+\frac{2}{(u+v)^2}\left[\Sigma X\bar{x} + \sqrt{\rho}\,\vartheta\left(\frac{c}{\rho} - 1\right)\right].$$

Das ist aber wiederum die Laplacesche Gleichung (3). Die Enveloppen der Kreisebenen der unendlich vielen normalen Kreissysteme, die sich aus unseren halbisotropen Ribaucourschen Kongruenzen ableiten lassen, sind also die Assoziierten der erzeugenden Fläche S, die eine Schar von ∞^1 Minimalgeraden enthält.

Vermöge der von E. Cosserat[1]) herrührenden bekannten Sätze lässt sich nun ohne weiteres feststellen, dass das konjugierte System (u, v) der zu den Flächen mit einer Schar von Minimalgeraden assoziierten Flächen so beschaffen ist, dass es bei stetiger Verbiegung der Fläche konjugiert bleibt.

Dieses interessante Beispiel einer stetigen Verbiegung mit Erhaltung eines konjugierten Systems ist zum erstenmal von Burke Smith[2]) festgestellt worden. Das konjugierte System besteht aus einer Schar von Minimalkurven und einer Schar von geodätischen Linien. Die zu den Flächen mit einer Schar von Minimalgeraden assoziierten Flächen nehmen daher eine Mittelstellung ein zwischen den Minimalflächen, auf denen das unveränderliche konjugierte System aus Minimalkurven sich zusammensetzt, und den Voss'schen Flächen, die ein aus geodätischen Kurven bestehendes invariantes System von konjugierten Kurven besitzen. Diese Mittelstellung entspricht der unserer halbisotropen Strahlensysteme zwischen den isotropen Strahlensystemen, deren erzeugende Flächen Kugeln, deren Enveloppen Minimalflächen,[3]) und den *Guichard*schen Strahlensystemen, deren erzeugende Flächen pseudosphärische, deren Enveloppen *Voss*sche Flächen sind.

---

[1]) E. Cosserat, Paris, C. R. 113 (1891), p. 460 u. p. 498.

[2]) Burke Smith, „Certain surfaces admitting of continuous deformation with preservation of conjugate lines." Bull. americ. math. soc. Vol. XIII. 1906, Nr. 4, p. 164—170. (In der math. amer. Ges. am 30. Dezember 1904 gelesen.)

[3]) Auf den Beweis dieses, soviel mir bekannt ist, noch nirgends erwähnten Satzes, dass die Enveloppen der Kreisebenen der unendlich vielen normalen Kreissysteme, die zu einem isotropen Strahlensystem gehören, Minimalflächen sind, werde ich an anderer Stelle zurückkommen. Desgleichen auf die Sätze von K. Kommerell über Guichardsche Systeme (vergl. V. Kommerell und K. Kommerell „Spezielle Flächen und Theorie der Strahlensysteme", Sammlung Schubert LXII. Leipzig 1911), die durch die Beziehung zur Theorie der normalen Kreissysteme eine neue Grundlage gewinnen.

Unabhängig von Burke Smith hat L. Raffy[1]) vier Jahre später die Beziehung von neuem aufgestellt.

Auch dieses Resultat hängt wesentlich von der Form

$$K = -\frac{1}{\psi(v)^2}$$

des Krümmungsmasses ab, wenn die Fläche auf die Haupttangentenkurven bezogen wird. Dagegen führt die Frage nach den W-Strahlensystemen, deren einer Brennmantel durch eine Fläche mit einer Schar von Minimalgeraden gebildet wird, und die also (nach Bianchi, Vorlesungen S. 338) auch in den Bereich unserer Betrachtungen gehören, auf den trivialen Fall, dass die Brennflächen zusammenfallen.

Wir sehen also:

Die Assoziierten der erzeugenden Flächen eines halbisotropen *Ribaucour*schen Strahlensystems sind die Enveloppen der Kreisebenen der zugehörigen normalen Kreissysteme. Sie besitzen ein bei stetiger Verbiegung unveränderliches konjugiertes System, das den Haupttangentenkurven der erzeugenden Fläche entspricht.

---

[1]) L. Raffy, „Sur les réseaux conj. persist. qui comprennent une fam. de lign. min. Paris. C. R. t. 146 (1908).

Lebenslauf.

Geboren am 15. August 1882 zu Neu-Ulm als Sohn des Gefängniswärters Franz Weickmann besuchte ich die Volksschule daselbst und hierauf das Gymnasium zu Ulm, das ich im Juli 1901 absolvierte. Sodann widmete ich mich an der Universität München dem Studium der Mathematik. Im Herbst 1905 legte ich das Lehramtsexamen für den Unterricht in der Mathematik und Physik ab. Vom 1. Dezember 1905 bis zum 1. Januar 1908 war ich Assistent der Kgl. Meteorologischen Zentralstation zu München. Am 12. Dezember 1907 wurde mir vom Senate der Kgl. Ludwig-Maximilians-Universität München ein v. Lamontsches Stipendium für die Jahre 1908, 1909 und 1910 verliehen. Ich besuchte darauf die Universität Göttingen zum Zwecke weiterer mathematischer Studien. Seit dem Jahre 1910 bin ich wieder als Custodieverweser an der Meteorologischen Zentralstation tätig.

Ich besuchte in München die Vorlesungen bezw. Seminarien der Herren Professoren; Anding, Bauer †, v. Bayer, v. Braunmühl †, Burger, Doehlemann, Doflein, Erk †, Goebel, Grätz, Güttler, Hartogs, v. Heigel, Hertwig, Lindemann, Lipps, v. Müller †, Perron, Pringsheim, Ranke, v. Röntgen, Rothpletz, v. Seeliger, Sommerfeld, Voss, v. Weber.

In Göttingen nahm ich teil an den Vorlesungen und Seminarien der Herren Bernstein, Hilbert, Landau, Prandtl, Wiechert, Zermelo, sowie an den Sitzungen der mathematischen Gesellschaft.